

FONDO PIZZOFALCONE



BIBLIOTECA PROVINCIALE

Armadio

XXVII



Palchetto

Num.° d'ordine

29939

18 H. 52

NAZIONALE

B. Prov.

I

304

NAPOLI

VITT. EM. III

B. P
I
301

1

606257 SBN

ELEMENTI

DI

A R I T M E T I C A

PRATICA E TEORETICA

del Professore

Giacomo Schettini



NAPOLI,

Dallo Stabilimento Tipografico del Casso

Strada mezzocannone n° 75, p. p.

1831.

924002

SECRET

SECRET

PREFAZIONE

Nostro intendimento, nel dare alla luce questi elementi di aritmetica è quello di esser utile a' giovanetti, che destinati a ricevere una buona e gentile educazione non possono esser dispensati dallo studio dell'aritmetica; sia che poi volendosi inoltrare nelle scienze matematiche, debba questo servir loro di primo stadio in tal astruso, lungo, e nobile cammino; sia che pensando rivolgersi a qualunque altra specie di applicazione conducente ad ottener considerazione nel vivere civile, debba questo studio esser loro semplicemente di ausilio e di decoro. Ed affin di conseguire lo scopo propostoci, si è messa per noi ogni cura, nell'insegnamento che abbiamo dato più anni di questa scienza, e privatamente, e nel Real collegio di marina, d'indagare quale fosse stata la maniera più semplice a poter gettare le fondamenta del vasto edificio delle scienze matematiche nella mente de' giovanetti, per modo che essi potessero con più di agevolezza appararne i principii.

Il metodo, che si è per noi sperimentato più acconcio, è stato quello di enunciare prima un teorema, ovvero la regola che insegna a risolvere un problema, indi eseguire la soluzione su di un esempio, secondo vien prescritto dalla regola, e poi farne la dimostrazione. Così la nostra aritmetica serve egualmente bene al pratico ed al teoretico; il pratico si arresta quando incontra le tre lettere iniziali della parola *dimostrazione*, meno solo ne' paragrafi 35, 40, e 48 ove le ragioni si accostano all'evidenza, ed il saperle torna utile anche a coloro che debbonsi nella sola aritmetica pratica versare; il teoretico poi procede per conoscere la ragione di

ciò che la regola prescrive , o l'enunciato di un teorema asserisce. Le dimostrazioni per lo più si sono fatte in concreto sopra appositi esempi , considerando che in quella età a cui ci riferiamo non si è capace di sostenere un ragionamento astratto, se questo non sia chiarissimo e brevissimo.

Si sono poi divisi questi elementi di Aritmetica in tre parti. Nella prima abbiám trattato delle quattro operazioni fondamentali su i numeri interi, fratti, e decimali, e di alcune proprietà di questi numeri, considerandoli sempre come astratti. Nella seconda abbiamo esposto le avvertenze da tenersi nel calcolare i numeri allorchè essi rappresentano unità concrete ; poscia siamo passati alla teorica delle proporzioni ; ed infine alle applicazioni che sogliono farsi dell'aritmetica alla soluzione di varii problemi.

Le dette due prime parti sono le sole che debbono studiarsi da' giovanetti , perchè adatte alla loro intelligenza ; e però abbiamo esposto in esse quanto è più che sufficiente per la loro età ; sicchè dopo lo studio delle due anzidette parti, i medesimi sono nel grado di poter dare un soddisfacente esame in aritmetica ragionata.

Nella terza parte poi abbiám trattato le materie più elevate di questa scienza , necessarie a conoscersi da coloro i quali vogliono progredire nello studio delle matematiche. Formano quindi oggetto di questa terza parte alcune proprietà de' numeri e fra esse la ricerca di tutti i divisori di un numero dato, non che quella del massimo comun divisore e del minimo comun dividendo di più numeri, come pure il seguito delle frazioni decimali periodiche. Indi segue l'estrazione delle radici quadrate e cubiche da' numeri, dimostrandosi che sono incommensurabili quelle che appartengono a numeri non quadrati o cubi perfetti. Infine abbiám toccato l'interessante articolo delle approssimazioni numeriche, e le principali e più importanti proprietà delle frazioni continue.

PARTE PRIMA

C A P. I.

NOZIONI PRELIMINARI

1. Egli è certo che , essendo dato un oggetto qualunque, possiamo concepirne un altro consimile più grande o più picciolo; e quindi concepirne possiamo il doppio, il triplo, il quadruplo, ec., ovvero la metà, la terza, la quarta parte ec.; val quanto dire che, un qualsivoglia oggetto può riguardarsi come capace di accrescimento e di diminuzione: considerato come tale, esso prende il nome di *grandezza*. Epperò in breve:

Dicesi *grandezza* o *quantità* tutto ciò che si considera come suscettibile di aumento e di diminuzione.

2. La *grandezza* può manifestarsi sotto due diversi aspetti.

O si manifesta come un sol tutto senza distinzione o interruzione di parti, ed allora si chiama *grandezza continua*.

O si manifesta come una collezione di parti, o di grandezze della stessa specie, distinte l'una dall'altra, ed allora si chiama *grandezza discreta* (*).

(*) La parola *discreta* deriva dal latino *discretus* participio di *discerno* che significa *distinguere discernere*.

Tali sono le diverse collezioni di cose dello stesso genere, come per esempio, una collezione di libri, di uccelli, di alberi, ec.

3. Le grandezze, o che sieno discrete o continue, si distinguono in *omogenee* ed in *eterogenee*.

Diconsi *omogenee* quelle della stessa natura, *eterogenee* quelle di natura diversa.

Così, per esempio, le linee sono omogenee con le linee, le superficie con le superficie, i pesi con i pesi; ma le linee sono eterogenee tanto con le superficie, quanto con i pesi, e questi con le superficie. Difatto non può istituirsi paragone di maggioranza o minoranza fra linea e superficie, fra linea e peso, e fra superficie e peso.

Il carattere delle grandezze omogenee consiste in ciò, che la minore ripetuta sufficientemente giungerà una volta a superer la maggiore.

4. La *Matematica* è quella scienza che ha per oggetto la grandezza. Essa è distribuita in più rami, che prendono distinto nome, secondo il modo diverso con che contemplano la grandezza (*).

Quel ramo delle scienze matematiche che tratta della grandezza continua si chiama *geometria*.

Si chiama poi *algebra* quel ramo delle matematiche che si occupa della quantità discreta in modo generale.

5. In una collezione di parti o grandezze della stessa specie, quella che si prende per termine di paragone, in matematica si chiama *unità*.

(*) La parola *matematica* deriva dal greco *mathein*, che significa *imparare*, e da *tecne* che significa *arte*; cioè *arte d'imparare*; perchè in essa s' impara la vera scienza, ed è di aiuto all' umano intelletto per apprendere bene ogni altra cosa.

Una collezione di più unità o di parti dell'unità si chiama *numero* (*).

Quando il numero esprime solamente una collezione di più unità, si chiama *numero intero*.

Quando poi esprime una collezione di parti dell'unità, si chiama *numero fratto*.

6. *Misurare* una grandezza significa prendere un'altra qualunque della stessa specie per unità, e trovare il numero che esprime quante di queste unità, o parti della stessa sono contenute nella grandezza proposta. Un tal numero dunque esprime la *misura* della grandezza che si considera (**).

7. L'unità è *arbitraria* quando appartiene ad un numero che esprime la misura di una quantità continua.

Così, per esempio, una stessa linea può essere uguale ad un certo numero di palmi, ovvero ad un certo numero di piedi, ovvero ad un certo numero di metri; secondo che siasi convenuto di prendere per unità un'altra linea chiamata *palm*o, ovvero un'altra chiamata *pie*de, ovvero un'altra chiamata *met*ro.

L'unità è *naturale*, quando appartiene ad un numero che esprime la misura di una collezione di cose dello stesso genere.

(*) Nella quantità discreta si considera una collezione di più unità, senza aver riguardo al rapporto che passa fra la quantità che si considera ed una di queste unità; ma il *numero propriamente esprime quante unità o parti dell'unità sono contenute nella quantità discreta*; cioè indica la *misura* della detta quantità.

Ecco perchè Newton definiva il numero non esser tanto la collezione di più unità, quanto la ragione astratta fra una quantità e quella dello stesso genere presa per unità.

(**) Suole anche dirsi, ma in termini meno precisi, che una grandezza si *misura* paragonandola ad un'altra qualunque della stessa specie presa per unità.

Così, per esempio, in una collezione di cavalli, di colonne, di aranci, il cavallo, la colonna, l'arancio è naturalmente la rispettiva unità.

8. Quella parte delle scienze matematiche, la quale si occupa particolarmente de' numeri, si chiama *Aritmetica* (*).

9. L'aritmetica poggia i suoi ragionamenti su talune verità o principj evidenti per se stessi, i quali diconsi *assioni*, e sono i seguenti.

I. Il tutto è maggiore di ciascuna sua parte, ed è uguale all'insieme di tutte le parti nelle quali è stato diviso.

II. Le quantità che sono uguali ad una stessa quantità, sono uguali fra loro.

III. Le quantità che sono doppie, triple, quadruple, ec. di quantità uguali, sono uguali fra loro.

IV. Le quantità che sono la metà, la terza parte, la quarta parte, ec. di quantità uguali, sono uguali fra loro.

V. Se a quantità eguali si aggiungono quantità uguali, quelle che ne risultano saranno uguali fra loro.

VI. Se da quantità uguali si tolgono quantità uguali, quelle che rimangono sono uguali fra loro.

10. Si chiama *teorema* una verità che non è chiara per se stessa come l'assioma; ma diviene evidente in forza di un ragionamento che dicesi *dimostrazione*.

Si chiama *problema* una quistione che si propone a risolvere.

Dicesi *corollario* una conseguenza che si ricava, o dopo la dimostrazione di un teorema, o dopo la *soluzione* di un problema.

(*) La parola *aritmetica* deriva dal greco *aritmos* (numero) e da *tecne* (arte); cioè *arte de' numeri*.

C A P. II.

DELLA NUMERAZIONE

11. Per distinguere un numero da un altro, richiedendosi che abbiano nomi differenti, è necessario assegnare un nome a ciascuna collezione di unità; conviene dunque formare queste diverse collezioni, e dare a ciascuna il proprio nome.

L'arte di formare, nominare, e scrivere tutt' i numeri possibili, si chiama *numerazione*.

A R T. I.

Formazione de' numeri interi.

12. La maniera più naturale di formare i numeri si è di aggiungere una unità ad un' altra unità, e si avrà così un primo numero; poi a questo numero si aggiungerà un' altra unità, e si avrà un secondo numero; ed a questo aggiungendo un' altra unità, se ne avrà un terzo; similmente può proseguirsi fin dove si vuole; dunque

I numeri sono *infiniti*, perchè niente impedisce di aggiungere altre unità ad un numero quanto si voglia grande, già formato.

A R T. II.

Della numerazione parlata.

13. La *numerazione parlata* è l'arte di nominare tutti i numeri possibili, servendosi di pochissimi vocaboli fra loro convenevolmente combinati.

14. Aggiungendo una unità ad un'altra unità, il numero che ne risulta si chiama *due*.

Aggiungendo a due una unità, il numero che ne nasce si chiama *tre*.

Facendo lo stesso rispetto a tre, e così successivamente, si avranno i numeri *cinque, sei, sette, otto, nove, dieci*.

La collezione di nove unità più una, che abbiamo chiamata *dieci*, si chiama anche *decina*.

15. Aggiungendo successivamente al numero dieci una unità, due unità, tre unità, e così di seguito sino a nove unità, si avranno i numeri *undici, dodici, tredici, quattordici, quindici, sedici, diciassette, diciotto, diciannove*.

16. Aggiungendo poi dieci unità al numero dieci, si avrà una collezione di due decine che si chiama *venti*. Una collezione di tre decine si chiama *trenta*; quella di quattro, *quaranta*; quella di cinque *cinquanta*; quella di sei *sessanta*; quella di sette *settanta*; quella di otto *ottanta*; quella di nove *novanta*.

Si conta per decine come si conta per unità, dicendosi: *una decina, due decine* ovvero *venti, tre decine* ovvero *trenta, quattro decine* ovvero *quaranta*, e così seguitando sino a *nove decine* ovvero *novanta*.

I numeri composti di decine ed unità, eccetto pochissimi, si pronunziano aggiungendo al numero delle decine quello delle unità che vi sono di più (*).

(*) Solamente vi sono delle eccezioni per i numeri compresi fra dieci e venti; perchè le collezioni di una decina ed una unità, di una decina e due unità, ec. sino a quella di una decina e sei unità, invece di chiamarsi *undici, dodici, tredici, quattordici, quindici, sedici*, avrebbero dovuto dirsi: *dieciuno, diecidue, diecitre, dieciquattro, diecicinque, diecisei*.

Così pure, per uniformità di linguaggio, invece di *venti, tren-*

Così, per esempio, due decine più cinque unità, si pronunzia *venticinque*; sei decine più otto unità, si pronunzia *sessantotto*; e così degli altri.

17. Una collezione di dieci decine si chiama *cento*, ovvero *centinaio*.

Si conta per centinaia come si conta per decine e per unità, dicendosi: *un centinaio*, ovvero *cento*, *due centinaia*, ovvero *duecento*, *tre centinaia*, ovvero *trecento*, e così di seguito sino a *nove centinaia*, ovvero *novcento* (*).

I numeri composti di centinaia, decine, ed unità, si pronunziano aggiungendo al numero delle centinaia quello delle decine e delle unità che vi sono di più. Così per esempio, un numero che contiene tre centinaia, quattro decine, e due unità, si pronunzia dicendosi: *trecentoquarantadue*.

18. Una collezione di dieci centinaia si chiama *mille*, ovvero *migliaia*.

Si conta per migliaia, come si conta per centinaia, decine, ed unità.

L'unione di dieci migliaia non ha nome particolare, perciò si chiama *decina di migliaia*.

L'unione di dieci decine di migliaia, la quale forma un centinaio di migliaia, nè anche ha nome particolare, perciò si chiama *centinaio di migliaia*.

L'unione di dieci centinaia di migliaia si chiama *milione*.

Dappoi vengono le *decine di milioni*, le *centinaia di milioni*, le *migliaia di milioni*, e così procedendo sino alle *centinaia di migliaia di milioni*.

ta, *quaranta*, *sessanta*, avrebbe dovuto dirsi: *duanta*, *treanta*, *quattranta*, *seianta*.

(*) Per vezzo di lingua si dice: *dugento* invece di *duecento*; come pure suole dirsi *cenquaranta*, *cencinquanta* invece di *centoquaranta* e *centocinquanta*.

19. Un milione di milioni si chiama *bilione*.

Dopo vengono le *decine* di bilioni, le *centinaia* di bilioni, e così seguitando sino alle *centinaia di migliaia* di bilioni.

Dopo le centinaia di migliaia di bilioni viene il milione di bilioni che si chiama *trilione*.

Similmente si prosegue avanti, chiamandosi *quadrilione* un milione di trilioni, e così in appresso (*).

20. Da quanto si è detto si raccoglie che un numero si divide in diversi *ordini* o *classi* di unità, le quali, cominciando dalle unità semplici, cioè da quelle del *primo* ordine, e salendo a quelle degli ordini superiori, sono *unità semplici*, *unità di decine*, ed *unità di centinaia*; poi vengono le *unità di migliaia*, le *unità di decine di migliaia*, e le *unità di centinaia di migliaia*; indi seguono le *unità di milioni*, quelle di *decine di milioni*, e quelle di *centinaia di milioni*; ed in appresso, le *unità di migliaia di milioni*, quelle di *decine di migliaia di milioni*, e quelle di *centinaia di migliaia di milioni*: lo stesso si dica rispetto agli ordini superiori.

21. I numeri minori di dieci si chiamano *numeri semplici*, tutti gli altri si chiamano *numeri composti*.

A R T. III.

Della numerazione scritta.

22. La *numerazione scritta* è l'arte di rappresentare tutti i numeri possibili per mezzo di pochi segni, che diconsi *cifre* ovvero *caratteri* o *figure*.

(*) Questa è la nomenclatura che comunemente si usa in Italia; ma in altri luoghi, e particolarmente in Francia, dai milioni in poi si cambia nome di tre in tre ordini di unità, in modo che le unità di migliaia di milioni si chiamano *bilioni*, le unità di mi-

I nove primi numeri si rappresentano generalmente con le seguenti cifre

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9,
uno, due, tre, quattro, cinque, sei, sette, otto, nove

ciascuna delle quali denota il numero che vi sta scritto al di sotto.

23. Poichè ogni numero non contiene nè più di nove unità semplici, nè più di nove unità di decine, nè più di nove unità di centinaia, ec., quindi emerge che potrà rappresentarsi con le cifre assegnate a' nove primi numeri, adoperandone una per ciascun ordine, la quale serve ad indicare quante unità di quell'ordine contiene il numero; ma bisogna che tali cifre sieno scritte in modo da potersi ben distinguere l'ordine di unità che ciascuna cifra rappresenta.

24. Nello scrivere un numero si è convenuto che la cifra, la quale rappresenta le unità semplici, occupi il primo posto a dritta, e procedendo verso sinistra, si fa occupare il secondo posto alla cifra, che dinota le unità di decine, il terzo posto alla cifra, che dinota le unità di centinaia, il quarto a quella, che dinota le unità di migliaia, il quinto a quella, che dinota le unità di decine di migliaia, e similmente seguitando, gli altri posti si faranno occupare dalle unità degli ordini superiori con quella stessa legge che si serba nella numerazione parlata.

Così, per esempio, dovendosi scrivere 5 centinaia, 2 decine, e 7 unità, si scriverà 527, e si leggerà, cominciando da sinistra verso dritta, dicendo : *cinquecentoventisette*.

gliaia di bilioni si chiamano *trilioni*, le unità di migliaia di trilion si chiamano *quadrilioni*, e così di seguito.

Parimente, dovendosi scrivere il numero *ottomila centosessantatré*, si scriverà 8169.

Nella stessa guisa si scriveranno gli altri numeri.

25. Se in un numero mancassero le unità di un certo ordine ; per dinotare tal mancanza , ossia per conservare alle unità degli ordini superiori quel posto che debbono occupare , si è immaginata una cifra a parte col fine di supplirla nel luogo dove mancano le unità di quell'ordine. Questa cifra si chiama *zero* , e si rappresenta con la caratteristica 0 : dunque

Lo zero è quella cifra aritmetica , che si adopera in supplemento di quell'ordine di unità , le quali mancano in un numero : perciò lo zero non ha valore per se medesimo, ma serve a far conservare il valore conveniente alla cifra che lo precede a sinistra.

Così, per esempio, se dovesse scriversi un numero composto di 6 migliaia, 2 centinaia, e 3 unità ; perchè in questo numero mancano le decine , le quali devono occupare il secondo posto , un tal posto si farà occupare dalla cifra zero , e si avrà il numero 6203 , che si leggerà *seimila dugentotré*.

26. Dunque , secondo il modo che noi abbiamo considerato formarsi i numeri, le cifre che bastano a rappresentare qualunque numero sono *dieci*, cioè le nove cifre che rappresentano i nove primi numeri , e la cifra zero , ad eccezione della quale , che non ha alcun significato o valore , le altre nove si chiamano *cifre significative*.

27. Riassumendo ciò che si è detto in questo articolo, possiamo conchiudere che un numero qualunque si scrive sotto la *dettatura* o dietro l'*enunciato* , scrivendo le cifre che rappresentano le unità dei suoi diversi ordini, cominciando dall'ordine più alto , e procedendo da sinistra verso dritta, av-

vertendo di porre un zero dove mancano le unità di qualche ordine (*).

A R T. IV.

Del sistema di numerazione.

28. Il *sistema di numerazione* consiste nella convenzione fatta di formare i numeri in modo che essi si compongano di diversi ordini di unità, ciascuna delle quali sia un determinato numero di volte maggiore di una unità dell'ordine immediatamente inferiore.

Quel numero che denota quante volte una unità di ciascun ordine è maggiore dell'unità dell'ordine immediatamente inferiore, si chiama *base* del sistema di numerazione.

29. La base del nostro sistema di numerazione è il numero *dieci*, perchè in questo sistema ogni unità di ciascun ordine è dieci volte maggiore dell'unità dell'ordine immediatamente inferiore.

Difatti, se per esempio si scrivesse 3, questa cifra dinoterebbe 3 unità semplici; ma se il 3 retrocedesse di un posto verso sinistra col porre una cifra alla sua dritta, per esempio un zero, allora si avrà 30 in dove la cifra 3 dinota unità *dieci* volte più grandi di quelle che prima dinotava. Così pure, se la cifra 3 fosse al terzo posto, dove dinota centinaia, facendosi passare al quarto posto, dinoterà 3 migliaia, cioè dinoterà unità *dieci* volte più grandi di quelle che prima dinotava (**).

(*) Alla fine di questi elementi faremo vedere il modo tenuto dagli antichi romani nello scrivere i numeri.

(**) Si suol dire che una cifra ha due valori, uno *proprio* o *assoluto*, ed è quello del numero delle unità che essa rappresenta,

Maniera di leggere i numeri.

30. Se un numero non ha più di tre cifre, la prima cifra a dritta dinotando unità, la seconda decine, e la terza centinaia, si leggerà cominciando da sinistra, cioè pronunziando prima il numero delle centinaia, poi quello delle decine, ed indi quello delle unità.

Così, per esempio, il numero 538 si legge *cinquecentotrentotto*.

Se poi avesse più di tre cifre, allora, per maggior facilità, si dividerà con virgole in gruppi, ciascuno di tre cifre, cominciando da dritta: quindi il primo gruppo dinotando *unità semplici, unità di decine, ed unità di centinaia*, il secondo *unità di migliaia, di decine di migliaia, e di centinaia di migliaia*, il terzo *unità di milioni, di decine di milioni, e di centinaia di milioni*, e così di seguito, si scriverà 1 sulla cifra che vien dopo i due primi gruppi, la quale dinota unità di milioni, e 2 sulla cifra che vien dopo i due secondi gruppi, la quale dinota unità di bilioni, e 3 sulla cifra che vien dopo i due terzi gruppi, e così di seguito.

Poi si leggerà il numero cominciando da sinistra, leggendo ciascun gruppo come se fosse solo; ma deve proferirsi l'ordine di unità che gli compete, vale a dire si aggiungerà la parola *mila* dove si trova la sola virgola, e la parola *mi-*

senza considerare di che ordine sieno le dette unità. L'altro *locale, di sito, o relativo*, ed è quello che si ha, avendo riguardo al sito che la cifra occupa, perchè allora viene a distinguersi l'ordine delle unità dalla stessa rappresentate.

Ma queste distinzioni sembrano inutili, dietro la convenzione

lioni , bilioni , triloni , ec. dove si trova la cifra segnata al di sopra rispettivamente con 1 , 2 , 3 , ec.

Così, per esempio, il numero 58302417150219, diviso in gruppi nel modo anzidetto , diverrà

$$58,302,417,150,219,$$

e si leggerà *cinquantottobiloni trecentoduemila quattrocentodiciassettemilioni cencinquantamila dugentodiciannove* (*).

A R T. VI.

Delle diverse specie di numeri.

31. Ogni numero esprimendo una collezione di più unità o di parti dell'unità, può considerarsi indipendentemente dalla natura delle unità che esso rappresenta; e perciò i numeri si dividono in *astratti* e *concreti*.

Numero astratto si dice quello che si enuncia senza denominare la specie delle sue unità: così, per esempio, dicendosi 9, 15, 200, ec., questi numeri sono astratti.

Numero concreto si dice poi quello ove si denomina la specie delle unità che esso esprime, come per esempio, 6 uomini, 50 miglia, 300 giorni, ec. (**).

fatta che il valore delle unità rappresentate da un cifra dipende dal posto che essa occupa.

(*) Secondo usano i Francesi le caratteristiche si apporrebbero

così $58,302,417,150,219,$

e si leggerebbe *cinquantottotrilioni trecentoduebilioni quattrocentodiciassette milioni centocinquantamila dugentodiciannove*.

(**) I numeri concreti sogliono anche distinguersi in *omogenei* ed *eterogenei*; ma una tale distinzione è inesatta, perchè essa de-

C A P. III.

DELLE QUATTRO OPERAZIONI PRINCIPALI SU I NUMERI INTERI.

32. Diversi problemi possono presentarsi a risolvere relativamente a' numeri; ma i quattro seguenti costituiscono propriamente la base del calcolo numerico, e perciò si chiamano le *quattro operazioni principali o fondamentali* dell'aritmetica. Eccone gli enunciati, disposti con lo stesso ordine con cui dobbiamo risolverli,

1. *Trovare un numero uguale all'insieme di più numeri dati.*

2. *Trovare l'eccesso di un numero maggiore su di un altro minore.*

3. *Ripetere un numero tante volte, quante unità sono in altro numero.*

4. *Dividere un numero in un dato numero di parti uguali.*

Essi prendono rispettivamente il nome di *addizione, sottrazione, moltiplicazione, e divisione.*

Si chiama poi operazione di *calcolo* qualunque operazione di composizione o decomposizione che si fa de' numeri per trovarne degli altri (*).

Dovendo occuparci successivamente della risoluzione dei quattro problemi accennati, facciamo primieramente osservare che nella prima parte di questi elementi considereremo

ve cadere sulle quantità rappresentante da' numeri, e non già su i numeri che dinotano una collezione astratta di più unità o parti di essa.

(*) *Calcolo* deriva dal latino *calculus* che significa *sassolino petruzza*; e si estese questa parola a dinotare anche le operazioni che si fanno su i numeri, perchè gli antichi si servirono di minute petruzze nel fare i loro conti ed in comporre i numeri.

i numeri indipendentemente dalla natura delle loro unità, cioè li considereremo come astratti.

A R T. I.

ADDIZIONE DE' NUMERI INTERI.

33. L'*addizione* è quella operazione aritmetica, che ha per oggetto di riunire più numeri in un solo il quale chiamasi *somma*.

34. Per indicare che più numeri debbono addizionarsi fra loro, si è convenuto far uso del segno $+$, che si pronunzia *più* e si scrive fra i numeri i quali debbono addizionarsi. Così per esempio volendo indicare che 5 deve addizionarsi con 4, si scrive $5+4$, e si legge *5 più 4*. Come pure per indicare che debbono addizionarsi i numeri 7, 3, e 6, si scriverà $7+3+6$.

Volendo indicarsi che un numero è uguale ad uno o più altri, si fa uso del segno $=$, che si pronunzia *uguale a*, e si scrive fra le due quantità che sono uguali. Così per esempio per indicare che $5+4$ è uguale a 9, si scrive $5+4=9$.

35. L'*addizione de' numeri interi si fa scrivendo i numeri da addizionarsi l'uno sotto l'altro, in modo che le unità dello stesso ordine siano situate in una medesima colonna, e si tira una linea al di sotto per separarli dalla somma; poi si addizionano i numeri contenuti in ciascuna colonna, cominciando dalla dritta; se la somma non supera 9, si scrive sotto la detta linea tal quale si è ottenuta; ma se contiene decine, si scrivono le sole unità, e le decine si riuniscono alla colonna seguente, ad eccezione della somma dell'ultima colonna, che deve scriversi tal quale si ottiene.*

DIMOSTRAZIONE. Sieno per esempio da addizionarsi i numeri 6549, 5082, e 394.

È chiaro che si avrà la somma di questi numeri unendo insieme tutte le loro parti, cioè tutte le loro unità, 6549 tutte le loro decine, tutte le loro centinaia, ec., e 5082 formandone un numero solo. Perciò, affin di eseguire 394 re più facilmente queste addizioni parziali, si scrivono i numeri dati in modo che le cifre dello stesso ordine cadano in una medesima colonna come si vede qui a fianco (*).

Poi si comincia dall'addizionare le loro unità, ed avremo che 9 unità più 2 unità fanno 11, più 4 unità fanno 15 unità; ma poichè 15 unità formano una decina e 5 unità, scriviamo sotto la linea le sole 5 unità, e la decina si ritiene per unirle alla colonna delle decine.

Indi si passa ad addizionare le decine che sono nella seconda colonna, alle quali si aggiunge la decina ritenuta, e si dirà: una decina che si porta, più 4 decine e fanno 5 decine, più 8 fanno 13, più 9 fanno 22 decine; ma poichè 22 decine formano 2 centinaia e 2 decine, scriviamo le sole 2 decine nel posto delle decine, e le 2 centinaia si ritengono per unirle alla colonna delle centinaia.

Passiamo ora ad addizionare le centinaia che sono nella

(*) Suole dirsi che i numeri da addizionarsi debbono essere omogenei; ma oltre l'incertezza di questa denominazione osservata nella nota al numero (31), avvertiamo che in questo luogo dove si considerano i numeri come astratti, la condizione dell'omogeneità è insignificante.

Che se poi occorresse col fatto di dover addizionare de' numeri concreti, allora le unità dagli stessi rappresentate non solo debbono essere omogenee, ma debbono essere ancora uguali fra loro. Così per esempio dovendosi addizionare 6 ducati e 5 ducati, si possono addizionare come numeri astratti e dire che fanno 11 ducati; ma 6 ducati e 5 franchi, quantunque rappresentino unità omogenee, non possiamo addizionarli come numeri astratti, perchè le unità

terza colonna, alle quali si aggiungono le 2 centinaia ritenute, e si dirà: 2 centinaia che si portano, più 5 centinaia fanno 7, più 3 fanno 10 centinaia; ma poichè 10 centinaia formano 1 migliaio e zero centinaia, scriviamo zero nel posto delle centinaia, ed il migliaio si ritiene per unirlo alla colonna delle migliaia.

Finalmente si passa ad addizionare le migliaia che sono nella quarta colonna, alle quali si aggiunge il migliaio ritenuto, e si dirà: 1 migliaio che si porta, più 6 migliaia fanno 7, più 5 fanno 12 migliaia, cioè 2 migliaia ed 1 decina di migliaia: si scriveranno al loro posto le 2 migliaia e l'1 decina di migliaia, perchè non vi è uient'altro ad addizionare.

Ora, avendo unito insieme tutte le unità, tutte le decine, tutte le centinaia, e tutte le migliaia de' numeri dati, ed avendo trovato che formano 5 unità, 2 decine, zero centinaia, 2 migliaia, ed 1 decina di migliaia, ne segue che il numero 14025 il quale contiene tutte queste unità, decine, centinaia, migliaia, e decine di migliaia, sarà la loro somma.

A R T. II.

Osservazioni sull'addizione.

36. Allorchè debbono addizionarsi molti numeri riesce più comodo, e difficilmente si va soggetto ad errori, scindendo l'addizione in più addizioni parziali, e poi facendo l'addizione delle diverse somme parziali che si ottengono.

Così, per esempio, se dovessero addizionarsi i numeri 3854, 7321, 7480, 9216, 532, 424, e 79.

da' medesimi rappresentate sono di valore diverso. Difatti la loro somma non fa nè 11 ducati, nè 11 franchi,

Possiamo fare l'addizione in tre volte, come si	3854
scorge quì a fianco, cioè addizionando i primi tre	7321
numeri separatamente dagli ultimi quattro ; si	7480
avranno così le due somme 18655 , e 10251 che	—
scrivonsi al di sotto. Poi si addizioneranno queste	9216
due somme , e si otterrà così la somma tota-	532
le 28906.	424
	79

Prova dell' addizione.

	18655
37. Si chiama <i>prova</i> di un' operazione aritme-	10251
tica una seconda operazione, la quale si fa per ve-	—
rificare se la prima sia stata ben fatta.	28906

La PROVA dell' addizione può farsi separando il primo de' numeri dati dagli altri con una linea , ed addizionando i rimanenti numeri ; poi a quest' ultima somma si aggiungerà il numero superiore che si era separato ; si otterrà così una nuova somma de' numeri dati , la quale , se risulta uguale a quella ottenuta la prima volta , sarà segno che le operazioni sono state ben eseguite.

Così , per esempio , se fossero dati ad addizio-	85307
nare i numeri scritti quì a fianco , la cui somma	94231
si trova essere 266533 ; affin di assicurarsi se l' o-	86423
perazione sia stata ben fatta , si tirerà una linea	572
sotto il primo numero 85307 , e si farà l' addizio-	—
ne di tutti gli altri numeri dati , la somma de' qua-	266533
li si troverà uguale a 180326 ; indi il primo nume-	—
ro separatosi aggiungerà alla somma 180326 di tut-	181226
ti gli altri , ed otterrassi così una seconda somma	85307
de' numeri dati , la quale trovandosi uguale alla	—
primitiva, è segno che le operazioni sono state ben	266533
fatte.	

A R T. III.

SOTTRAZIONE DE' NUMERI INTERI.

38. La *sottrazione* è quell'operazione aritmetica che ha per oggetto di togliere un numero minore da un altro maggiore.

Quel numero che si ottiene dopo aver tolto dal maggiore il minore si chiama *resto*, *residuo*, *eccesso* o *differenza* (*).

39. Per indicare che un numero deve togliersi da un altro, si fa uso del segno —, che si pronuncia *meno*, e si scrive fra il numero che soffre la sottrazione e quello che deve sottrarsi. Così, per esempio, per indicare che da 9 deve togliersi 5, si scrive $9 - 5$, e si legge *9 meno 5*: or poichè da 9 tolto 5 resta 4, ciò può indicarsi adoperando il segno di uguaglianza scrivendo $9 - 5 = 4$.

La sottrazione può considerarsi come un'operazione inversa dell'addizione di due numeri; ed è propriamente *quella operazione, in cui essendo data la somma di due numeri, ed uno di questi, si vuol trovare l'altro*. È importante notare che questo è veramente il punto di veduta generale sotto cui dovrebbe riguardarsi la sottrazione.

40. La *sottrazione de' numeri interi* si fa scrivendo il numero minore sotto il maggiore, in modo che le unità dello stesso ordine siano situate in una medesima colonna, e si tira una linea sotto al minore per separarlo dalla differenza; poi,

(*) Taluni autori si affaticano inutilmente a dare de' nomi particolari al numero che soffre la sottrazione ed a quello che deve sottrarsi, chiamandoli rispettivamente *diminuendo* e *diminutore*; mentre taluni altri vogliono conservare le antiche denominazioni di *sottraendo* e *sottrattore*.

cominciando dalla dritta, si sottrae la cifra inferiore della superiore, e quando ciò non può eseguirsi, si aumenta di dieci la cifra superiore; ma nel continuare l'operazione, la cifra significativa seguente a quella aumentata di dieci deve considerarsi diminuita di una unità, e se vi sono zeri intermedi, devono considerarsi come 9.

DIM. Sia per esempio il numero 50319 da cui deve togliersi il numero 23547.

È chiaro che togliendo dal numero maggiore tutte le parti del numero minore, cioè tutte le unità, decine, centinaia, ec. del numero minore, ciò che vi rimane sarà la cercata differenza fra i due numeri dati; perciò, affin di eseguire più facilmente queste sottrazioni parziali, scriveremo il numero minore sotto il maggiore in modo, che le cifre dello stesso ordine corrispondano in una sotto l'altra come si vede qui di contro.

Poi cominciamo a togliere le 7 unità del numero minore dalle 9 unità del numero maggiore; e poichè vi rimangono 2 unità, scriviamo sotto la linea il resto 2.	50329 23547 26782
---	---

Passiamo poi a togliere le 4 decine del numero minore dalle due decine del maggiore, ma tal sottrazione non potendosi eseguire, le 2 decine del numero maggiore si faranno imprestare 1 centinaio dalla cifra delle centinaia, la quale perciò rimarrà 2; e poichè 1 centinaio ridotto in decine, ed aggiunto alle 2 decine fa 12 decine, dobbiamo perciò togliere le 4 decine del minore da 12 decine, e scriveremo il resto 8 nel posto delle decine.

Passiamo ora a togliere le 5 centinaia del numero minore dalle centinaia del maggiore le quali sono rimaste 2, ma non potendosi, ci faremo imprestare 1 migliaio dalla cifra delle migliaia, la quale essendo zero, bisognerà che essa pure si faccia imprestare 1 decina di migliaia dalla cifra 5,

e però la cifra 5 resta 4 , e la cifra zero diviene prima 10 , perchè 1 decina di migliaia forma 10 migliaia , e poi resta 9 imprestando 1 migliaio alla cifra delle centinaia ; ora 1 migliaio imprestato alle 2 centinaia formando 12 centinaia , bisognerà perciò togliere da 12 centinaia le 5 centinaia del numero minore , ed il resto 7 centinaia si scriverà nel posto delle centinaia.

Passiamo ora a togliere le 3 migliaia del numero minore dalle migliaia del maggiore , le quali sono 9 , perchè la cifra zero è divenuta 9 ; ed il resto 6 migliaia si scriverà nel posto delle migliaia.

Finalmente passiamo a togliere le 2 decine di migliaia del numero minore dalle decine di migliaia del maggiore che sono rimaste 4 ; ed il resto 2 si scriverà nel posto delle decine di migliaia.

Ora avendo tolto dal numero maggiore tutte le unità , decine , centinaia , migliaia , e decine di migliaia del numero minore ; ed essendovi rimaste 2 unità , 8 decine , 7 centinaia , 6 migliaia , e 2 decine di migliaia ; ne segue che il numero 26782 composto da tutte queste unità , decine , centinaia , migliaia , e decine di migliaia , sarà il resto cercato.

A R T. IV.

Osservazioni sulla sottrazione de' numeri interi.

41. Nella sottrazione le cifre che hanno imprestato una unità possono considerarsi dello stesso valore di prima , il che equivale ad aggiungere una unità a ciascuna di esse ; ma allora bisogna anche aggiungerla alla cifra inferiore che deve sottrarsi , essendo chiaro che , se si aumentano tanto il numero che soffre la sottrazione , quanto quello che deve sottrarsi della medesima quantità , il resto sarà lo stesso.

Così dovendo togliersi il numero 5473 dal numero 8132, dopo scritti i numeri dati secondo la regola, come si vede qui a fianco, si dirà: Da 12 8132
tolto 3 resta 9; da 13 tolto 8, resta 5; da 11 5473
tolto 5, resta 6; da 8 tolto 6, resta 2. Perciò il 2659
resto cercato sarà il numero 2769.

42. Nella sottrazione è interessante osservare che il resto essendo l'eccesso del numero maggiore sul minore, il numero minore unito al resto debbono formare il numero maggiore. Da qui nasce che

La PROVA della sottrazione può farsi addizionando il numero minore col resto; poichè deve risultarne per somma il numero maggiore, se le operazioni sono state ben fatte.

Così per esempio dovendosi togliere il numero 5783 dal numero 7829; eseguendo l'operazione come si vede qui di contro, si avrà per resto 2046. Volendo ora assicurarci se l'operazione sia stata ben fatta, si addiziona il numero minore 5783 col resto 2046; e poichè si ottiene per somma il numero maggiore 7829, siamo sicuri che l'operazione è stata ben eseguita.

A R T. V.

MOLTIPLICAZIONE DE' NUMERI INTERI.

43. La *moltiplicazione* di due numeri interi è quell'operazione aritmetica, nella quale, essendo dati due numeri, se ne cerca un terzo che risulti dal ripetere uno di essi tante volte, per quante unità sono nell'altro.

Il numero che si ripete si chiama *moltiplicando*. Il numero che dinota quante volte il moltiplicando deve ripetersi si chiama *moltiplicatore*. Il terzo numero che si vuol trovare si

chiama *prodotto*. Il moltiplicando ed il moltiplicatore hanno ancora il nome comune di *fattori*, perchè concorrono insieme a fare il prodotto.

44. Per indicare che un numero deve moltiplicarsi per un altro si fa uso del segno $\times$, ovvero di un punto, i quali si pronunziano *moltiplicato per*, e si scrivono fra il moltiplicando ed il moltiplicatore. Così, per esempio, per indicare che 3 deve moltiplicarsi per 2, si scrive 3×2 , ovvero 3.2, e si legge *3 moltiplicato per 2*.

Allorchè ciascuno de' fattori, o un solo di essi è una somma indicata di altri numeri, la moltiplicazione si accenna chiudendo in parentesi ciascun fattore che è somma di altri numeri. Così, per esempio, il numero $5+4$ dovendosi moltiplicare per $3+2$, si scriverà $(5+4)(3+2)$, e si leggerà *5+4 moltiplicato per 3+2*. Così pure $5+4$ dovendosi moltiplicare per 3, si scriverà $(5+4) 3$, senza frapporre segno tra il fattore $(5+4)$ chiuso in parentesi, e l'altro fattore 3.

45. Dalla definizione, che si è data della moltiplicazione de' numeri interi, risulta che essa si riduce ad un'addizione di più numeri uguali. In effetti, dovendo, per esempio, moltiplicarsi 5 per 4, il prodotto sarà $5+5+5+5$, ossia 20; vale a dire, esso si forma addizionando tanti numeri uguali al moltiplicando, quante unità sono nel moltiplicatore. •

Ma, se volessimo trovare il prodotto di due numeri mediante l'addizione successiva del moltiplicando con sè stesso, l'operazione non solo sarebbe penosa, ma diverrebbe impraticabile quando il moltiplicatore è sufficientemente grande: ecco perchè si è cercato il modo di eseguire facilmente questa operazione, come ben tosto vedremo.

46. Dovendo moltiplicarsi due numeri interi fra loro possono darsi tre casi principali.

1. Allorchè il moltiplicando ed il moltiplicatore sono ambedue numeri semplici.

2. Allorchè il moltiplicando è numero composto, ed il moltiplicatore è numero semplice.

3. Allorchè il moltiplicando ed il moltiplicatore sono ambedue numeri composti.

PRIMO CASO

Moltiplicazione di due numeri semplici fra loro

47. La moltiplicazione di un numero semplice per un altro numero semplice non può farsi altrimenti che con l'addizione di tanti numeri uguali al moltiplicando, quante unità sono nel moltiplicatore. Così, per esempio, dovendosi moltiplicare 6 per 5, il prodotto sarà $6+6+6+6+6$; e poichè, effettuando questa addizione indicata, si ottiene per somma 30, un tal numero sarà il prodotto di 6 per 5.

Ma spesso occorrendo dover trovare i prodotti di due numeri semplici qualsivogliano, conviene perciò formare tutti questi prodotti una volta per sempre, nel modo detto poc' anzi, e poscia scrivendoli in un quadro, si manderanno a memoria, affinchè nelle occorrenze si abbiano pronti, senza bisogno di fare alcuna operazione per trovarli. Pitagora, filosofo greco, inventò una tavola, nella quale si trovano registrati con la massima semplicità ed ordine i prodotti di due numeri semplici comunque combinati. A questa tavola si dà il nome di *tavola pitagorica* in onore di colui ch'è l'inventor: essa si costruisce formando i prodotti di tutti i numeri semplici nel seguente modo.

Formazione della tavola di Pitagora.

Considerando che in questa tavola debbono esservi tutti i numeri semplici presi una volta, due volte, tre volte, ec. sino a nove volte; è chiaro che essa si formerà scrivendo tutti i numeri semplici col loro ordine di grandezza in una linea orizzontale; perciò in questa linea vi si troveranno tutti i numeri semplici presi una volta. Poi sotto questa prima linea orizzontale si scriveranno in una seconda linea gli stessi numeri semplici ripetuti due volte, il che si ottiene sommando ciascun numero della prima linea con sè stesso. Indi al di sotto della seconda linea si scriveranno in una terza linea tutti i numeri semplici ripetuti tre volte, il che si consegue sommando ciascun numero della seconda linea con quello che gli sta al di sopra nella prima linea.

Similmente si prosegue finchè si giunge alla nona linea dove vi sono tutti i numeri semplici ripetuti 9 volte; in tal guisa verrà a formarsi la seguente tavola.

		senso orizzontale							
senso verticale	1	2	3	4	5	6	7	8	9
	2	4	6	8	10	12	14	16	18
	3	6	9	12	15	18	21	24	27
	4	8	12	16	20	24	28	32	36
	5	10	15	20	25	30	35	40	45
	6	12	18	24	30	36	42	48	54
	7	14	21	28	35	42	49	56	63
	8	16	24	32	40	48	56	64	72
	9	18	27	36	45	54	63	72	81
	10	20	30	40	50	60	70	80	90
	11	22	33	44	55	66	77	88	99
	12	24	36	48	60	72	84	96	108

È chiaro poi che per trovare, per esempio, in questa tavola 5 ripetuto 7 volte, bisognerà cercarlo nella settima linea in quel posto che corrisponde al di sotto del 5 della prima linea, e si troverà 35 pel prodotto cercato. In una maniera consimile si troveranno nella medesima tavola i prodotti di due numeri semplici qualsivogliano.

Facciamo intanto osservare che questa tavola potrebbe prolungarsi fin dove si vuole. Prolungandola sino a 12 nel solo senso verticale, vi si troveranno anche i prodotti di 10, 11,

e 12 per qualunque numero semplice; quelli di 10 e di 11 sarà facilissimo mandarli a memoria; ma nella seconda parte di questi elementi ci sarà utile il conoscere i prodotti di 12 per qualunque numero semplice.

SECONDO CASO

Moltiplicazione di un numero composto per un numero semplice.

48. *Un numero composto si moltiplica per un numero semplice formando i prodotti parziali delle unità, decine, centinaia, ec. del moltiplicando pel moltiplicatore; ma nello scrivere il prodotto delle unità, se esso contiene decine, si scrivono le sole unità, e le decine si ritengono per unirle al prodotto delle decine; e nello scrivere il prodotto delle decine dopo avervi unite quelle riportate dal prodotto delle unità, se vi sono centinaia, si scrivono le sole decine, e le centinaia si ritengono per unirle al prodotto delle centinaia; similmente si prosegue sino all'ultimo prodotto.*

DIM. Sia per esempio, il numero 5763 che voglia moltiplicarsi per 8.

È manifesto che il numero 5763 dovendo ripetersi 8 volte, è lo stesso che ripetere 8 volte le sue 3 unità, le sue 6 decine, le sue 7 centinaia, e le sue 5 migliaia, e formare un numero solo de' diversi prodotti parziali che si ottengono.

Perciò, scriviamo il moltiplicando sul moltiplicatore come si vede qui di contro, e cominciamo dal moltiplicare le 3 unità per 8; quindi si
 5763
 8
 ———
 24
 3 unità moltiplicate per 8 fanno 24 unità, cioè 2 decine e 4 unità; si scriveranno, come si
 46104
 fa nella somma, le sole 4 unità, e le 2 decine si ritengono per unirle al prodotto delle 6 decine per 8.

Poi passiamo a moltiplicare le 6 decine per 8 , e si dirà: 6 decine moltiplicate per 8 fanno 48 decine , alle quali aggiungendo le due decine ritenute , si avranno 50 decine ; ma poichè 50 decine formano 5 centinaia e zero decine , si scriverà zero nel posto delle decine , e le 5 centinaia si ritengono per unirle al prodotto delle 7 centinaia per 8 .

Indi si passa a moltiplicare le 7 centinaia per 8 , e si dirà: 7 centinaia moltiplicate per 8 fanno 56 centinaia , alle quali aggiungendo le 5 centinaia ritenute , si avranno 61 centinaia ; e poichè 61 centinaia formano 6 migliaia ed 1 centinaio , il centinaio si scrive nel posto delle centinaia , e le 6 migliaia si ritengono per unirle al prodotto delle 5 migliaia per 8 .

Finalmente si passa a moltiplicare le 5 migliaia per 8 , e si dirà : 5 migliaia moltiplicate per 8 fanno 40 migliaia , alle quali aggiungendo le 6 migliaia ritenute , si avranno 46 migliaia che si scrivono nel loro posto tali come si sono ottenute , perchè non vi è niente altro a moltiplicare ; quindi il prodotto cercato sarà il numero 46104 .

TERZO CASO

49. In PRIMO LUOGO sia da moltiplicarsi un numero composto per un altro le cui cifre sieno l'unità seguita da zeri; cioè per i numeri 10 , 100 , 1000 , ec. ; si terrà la seguente regola .

Un numero si moltiplica per 10 , 100 , 1000 , ec. aggiungendo uno , due , tre , ec. zeri alla sua dritta.

Dim. Sia , per esempio , il numero 384 . Aggiungendo un zero alla sua dritta , esso diviene 3840 , cioè diviene 10 volte maggiore , perchè la cifra 4 che dinotava unità è passata a dinotar decine che sono unità 10 volte più grandi ; e la cifra 8 che dinotava decine è passata a dinotar centinaia che

sono 10 volte più grandi delle decine; e la cifra 3 la quale dinotava centinaia è passata a dinotar migliaia che sono 10 volte più grandi delle centinaia. Laonde tutte le parti del numero proposto essendo divenute 10 volte maggiori, il tutto che ne risulta sarà pure 10 volte maggiore, cioè il proposto numero si sarà moltiplicato per 10.

Se poi si aggiungono due zeri a dritta del proposto numero, esso moltiplicandosi prima per 10 con l'aggiunzione del primo zero, si moltiplicherà di nuovo per 10 con l'aggiunzione del secondo zero, e perciò si renderà 100 volte maggiore, perchè 10 moltiplicato per 10 fa 100.

Così pure aggiungendosi tre zeri a dritta del numero proposto, esso moltiplicandosi prima per 100 con l'aggiunzione de' due primi zeri, verrà poi a moltiplicarsi per 10 con l'aggiunzione del terzo zero; perciò si renderà 1000 volte maggiore, perchè 100 moltiplicato per 10 fa 1000.

Similmente si conchiuderà che se si aggiungono altri zeri, il proposto numero si moltiplicherà per 10000, 100000, ec.

50. COROLLARIO. Poichè aggiungendo uno, due, tre, ec. zeri a dritta di un numero, esso diviene 10, 100, 1000, ec. volte maggiore; ne segue che sopprimendo uno, due, tre, ec. zeri dalla dritta di un numero, esso diverrà 10, 100, 1000, ec. volte minore.

51. IN SECONDO LUOGO, sia da moltiplicarsi un numero composto per un altro che ha una sola cifra significativa seguita da zeri: si terrà la seguente regola.

Dovendosi moltiplicare, un numero composto per un altro che abbia una sola cifra significativa seguita da zeri, si moltiplichì il primo numero per la sola cifra significativa del secondo, e poi si aggiungano a dritta del prodotto tanti zeri quanti ne contiene il secondo numero.

Sia, per esempio, il numero 35 da moltiplicarsi per 700.

Eseguendo la moltiplicazione di 35 per la sola cifra significativa 7, si ha per prodotto 245; ed aggiungendo due zeri a dritta di 245, si avrà il numero 24500; laonde questo numero sarà il prodotto che si cercava.

DIM. Essendo il numero $700 = 7 \times 100$ n.^o(49), il solo fattore 7 sarà 100 volte minore del prodotto 7×100 ; perciò moltiplicando 37 per 7, veniamo a moltiplicarlo per un numero 100 volte minore del vero, quindi il prodotto 245 che si ottiene sarà pure 100 volte minore del prodotto vero; laonde per avere il vero prodotto, bisogna moltiplicare 245 per 100, il che sappiamo che si fa aggiungendovi due zeri alla sua dritta: dunque il vero prodotto sarà 24500.

52. In TERZO LUOGO, sia da moltiplicarsi un numero composto per un altro numero qualunque: si terrà la seguente regola.

Due numeri si moltiplicano fra loro formando i prodotti parziali del moltiplicando per ciascuna cifra del moltiplicatore, e scrivendo questi prodotti l'uno sotto l'altro, in modo che quello relativo alla cifra delle decine retroceda di un posto verso sinistra, quello relativo alla cifra delle centinaia retroceda di due posti, quello relativo alla cifra delle migliaia di tre posti, e così di seguito; poi si addizionano; la somma che si otterrà sarà il prodotto totale cercato.

Sia per esempio il numero 327 che voglia moltiplicarsi per 564.

Scrivendo il moltiplicando sul moltiplicatore, come si vede qui di contro, e tirandovi una linea al di sotto, si comincerà dal moltiplicare 327 per la cifra 4 delle unità del moltiplicatore, come si fa nella moltiplicazione di un nume-

ro composto per un numero semplice, ed il prodotto 1308, si scrive sotto della linea. Poi si passa a moltiplicare 327 per la cifra 6 delle decine del moltiplicatore, ed il prodotto 1962 si scriverà al di sotto del primo prodotto parziale 1308, ma in modo che retroceda di un posto verso sinistra. Indi si passa a moltiplicare 327 per la cifra 5 delle centinaia del moltiplicatore, ed il prodotto 1635 si scriverà sotto il precedente prodotto parziale 1962, in modo che retroceda di due posti verso sinistra rispetto al primo prodotto parziale. Poscia si sommeranno tutti i prodotti parziali ottenuti, e la somma 184428 che ne risulta sarà il prodotto totale cercato.

DIM. Poichè il moltiplicatore 564 equivale a 4 unità più 60 unità, più 500 unità, è manifesto che il numero 327 dovendosi ripetere 564 volte, equivale a dire che deve ripetersi 4 volte, più 60 volte, più 500 volte, cioè,

il numero	327
deve moltiplicarsi per	4
più per	60
più per	500,

e poi deve formarsi un numero solo de' diversi prodotti parziali che si ottengono. Perciò prima si moltiplicherà 327 per la cifra 4 delle unità, e si avrà per prodotto 1308; poi dovendosi moltiplicare 327 per 60, basterà moltiplicare 327 per la sola cifra 6 delle decine, e dopo aggiungere un zero

a dritta del prodotto , per cui si avrà il numero	
19620. Finalmente dovendosi moltiplicare 327	327
per 500 , basterà moltiplicare 327 per la sola ci-	564
fra 5 delle centinaia , e poi aggiungere due zeri	-----
a dritta del prodotto , per cui si avrà il numero	1308
163500.	19620

Ciò fatto , si sommeranno i prodotti parziali 163500
 ottenuti, come si vede qui a fianco , e si avrà per
 somma il numero 184428 , che sarà il prodotto 184428
 totale cercato.

Ora è manifesto che allorquando i prodotti parziali si
 scrivono l'uno sotto l'altro per sommarli , potrà soppri-
 mersi lo zero a dritta del secondo prodotto parziale, e i due
 zeri a dritta del terzo , perchè i medesimi nulla influiscono
 sul prodotto totale ; perciò , nell' eseguire l' operazione , si
 trascurano i detti zeri , e i prodotti parziali si scrivono in mo-
 do che quello delle decine retroceda di un posto verso sini-
 stra , quello delle centinaia di due posti , e così di seguito ,
 se vi fossero altri prodotti parziali.

A R T. IV.

Osservazioni sulla moltiplicazione.

53. Avendosi più numeri , come per esempio , i quattro
 numeri 8 , 5 , 2 , 7 : se occorresse che il primo 8 debba
 moltiplicarsi pel secondo 5 , e poi il prodotto che ne nasce
 debba moltiplicarsi pel terzo numero 2 , ed il nuovo pro-
 dotto che si ottiene debba moltiplicarsi pel quarto numero
 7 ; l'ultimo risultato a cui si giunge, il quale è 560, si chia-
 ma *prodotto de' quattro numeri dati*.

Dunque , in generale, se si propone a fare il prodotto di
 più numeri, significa che il primo deve moltiplicarsi pel se-

condo , e poi il prodotto che ne nasce pel terzo , ed il nuovo prodotto che si ottiene pel quarto, e così di seguito, sino all'ultimo numero. Ciò si esprime anche dicendosi, che i numeri proposti debbono moltiplicarsi *successivamente* fra loro.

54. Quantunque dalla tavola di Pitagora si sappia che il prodotto di due numeri semplici non cambia, tanto se si moltiplica il primo pel secondo, quanto se si moltiplica il secondo pel primo; pure questo fatto, il quale si avvera anche nel fare il prodotto di due altri numeri, bisogna che sia dimostrato in generale ; e ciò può farsi nel seguente modo.

Sia per esempio il numero 8 che debba moltiplicarsi per 6.

Immaginando scritte le 8 unità del moltiplicando in una linea verticale; poichè queste 8 unità debbonsi ripetere 6 volte , è lo stesso che ripetere 6 volte la
 linea formata da queste 8 unità ; in tal modo si
 avrà la tavola, che si vede qui a fianco, nella qua-
 le si troveranno scritte tante unità quante deve
 averne il prodotto di 8 per 6.

Ma è chiaro che questa tavola si trova composta ancora di linee orizzontali, ciascuna delle quali contiene 6 unità , ossia tante quante ne contiene il moltiplicatore , e queste linee orizzontali sono uguali di numero alle unità contenute nel moltiplicando.

Ciò posto , il numero delle unità di questa tavola è sempre lo stesso , tanto se si conta per linee verticali , quanto se si conta per linee orizzontali ; ma nel primo caso viene a prendersi il moltiplicando tante volte quante unità sono nel moltiplicatore , e nel secondo viene a prendersi il moltiplicatore tante volte quante unità sono nel moltiplicando ; perciò, o si moltiplichino il primo di questi numeri pel secon-

do, o il secondo pel primo, il prodotto sarà sempre lo stesso (*).

55. *Se si moltiplichi un numero pel prodotto di due fattori, si ottiene lo stesso risultato che si ha moltiplicandolo prima per uno de' due fattori, e poi il prodotto che ne nasce per l'altro.*

Sia, per esempio, il numero 8 da moltiplicarsi per 42, che è il prodotto di 7 per 6: dico che tanto è moltiplicare 8 per 42, quanto 8 prima per 7, e poi il prodotto che ne nasce per 6.

Dim. Essendo 42 uguale a 7 ripetuto 6 volte, il solo fattore 7 sarà 6 volte minore del prodotto 42; laonde, se invece di moltiplicare 8 per 42, lo moltiplichiamo pel fattore 7, veniamo a moltiplicarlo per un numero 6 volte minore; perciò il prodotto 56, che ne risulta, sarà pure 6 volte minore del prodotto vero 8×42 ; dunque, per avere il vero prodotto, converrà moltiplicare 56 per 6; e quindi il prodotto vero 8×42 sarà uguale a 56×6 , ossia ad $8 \times 7 \times 6$.

56. *Risulta dalla precedente verità che, un prodotto di tre fattori sarà sempre lo stesso, comunque si permuti l'ordine di moltiplicazione di questi tre fattori.* Così, per esempio, se i tre fattori del prodotto fossero i numeri 8, 7, e 6, si avrà

(*) Si noti che questa dimostrazione non si può far dipendere dal supporre indefinitamente prolungata la tavola di Pitagora, come taluno ha creduto.

In effetti ponendo mente al modo come si forma la tavola, se ne deduce che il prodotto di 7 per 5 deve trovarsi nella casella situata nella quinta linea orizzontale verticalmente al di sotto di 7; ed il prodotto di 5 per 7 deve trovarsi nella casella situata nella settima linea orizzontale verticalmente al di sotto di 5; e niuna ragione, ma il solo fatto ci dice che il prodotto, il quale sta nella prima delle caselle accennate, pareggia quello che sta nella seconda.

$$8 \times 7 \times 6 = 8 \times 6 \times 7 = 6 \times 8 \times 7 = 6 \times 7 \times 8 = 7 \times 8 \times 6 \\ = 7 \times 6 \times 8.$$

57. *Il risultato che si ottiene dal moltiplicare un numero pel prodotto di più fattori equivale a quello che si ottiene moltiplicando il numero dato successivamente per ciascuno di questi fattori.*

Sia per esempio il numero 84 da moltiplicarsi pel prodotto de' cinque fattori 2, 5, 3, 7, 9, che è 1890. Dico che il prodotto di 84 per 1890 è uguale a quello che si ottiene moltiplicando prima 84 per 2, e poi il prodotto che ne nasce per 5, e poi il secondo prodotto che ne risulta per 3, ed indi il terzo prodotto che n' emerge per 7, ed infine il quarto prodotto a cui si giunge per 9.

Dim. Difatti, osserviamo primieramente che nel fare il prodotto de' cinque fattori 2, 5, 3, 7, 9, il primo prodotto che si forma è quello di $2 \times 5 = 10$; il secondo è quello di $10 \times 3 = 30$; il terzo è quello di $30 \times 7 = 210$; infine il quarto è quello di $210 \times 9 = 1890$.

Ciò posto, poichè $1890 = 210 \times 9$, si avrà, in forza del teorema precedente,

$$84 \times 1890 = 84 \times 210 \times 9. \dots (a).$$

Ma poichè $210 = 30 \times 7$, si avrà, per lo stesso teorema, $84 \times 210 = 84 \times 30 \times 7$; laonde, se nell'eguaglianza (a), invece di 84×210 , mettiamo $84 \times 30 \times 7$, ne verrà,

$$84 \times 1890 = 84 \times 30 \times 7 \times 9 \dots (b).$$

Ma perchè $30 = 10 \times 3$, si avrà $84 \times 30 = 84 \times 10 \times 3$; quindi, se nell'eguaglianza (b), invece di 84×30 , mettiamo $84 \times 10 \times 3$, ne emergerà,

$$84 \times 1890 = 84 \times 10 \times 3 \times 7 \times 9 \dots (c).$$

Ma poichè $10 = 2 \times 5$, si avrà $84 \times 10 = 84 \times 2 \times 5$; e però, se nell'eguaglianza (c), invece di 84×10 , mettiamo

$84 \times 2 \times 5$, ne risulterà infine $84 \times 1890 = 84 \times 2 \times 5 \times 3 \times 7 \times 9$: il che bisognava dimostrare.

38. *Il prodotto di più fattori non cambia, comunque si permuti l'ordine della moltiplicazione di questi fattori.*

Siano, per esempio, i sei fattori 8, 2, 5, 3, 7, 9. Dico che il loro prodotto $8 \times 2 \times 5 \times 3 \times 7 \times 9$, ossia 15120, è sempre lo stesso, comunque si permuti l'ordine di moltiplicazione de' medesimi fattori.

Dim. Primieramente, sia un fattore estremo quello che si vuol trasferire in un altro posto; e sia, per esempio, il fattore 9 il quale vogliasi porre fra 2 e 5. Ridurremo il prodotto de' fattori proposti ad un altro di tre fattori, il primo che comprenda il fattore 2 con tutti i fattori che gli stanno a sinistra; il secondo che comprenda il fattore 5 con tutti i fattori che gli stanno a dritta, meno che l'ultimo fattore 9; ed il terzo sia il fattore 9; e per maggior chiarezza chiuderemo in parentesi il gruppo de' fattori dove è il fattore 2, ed il gruppo de' fattori dove è il fattore 5, avremo così

$$8 \times 2 \times 5 \times 3 \times 7 \times 9 = (8 \times 2)(5 \times 3 \times 7)9,$$

dove concependo eseguita la moltiplicazione di 8 per 2, e quella di 5 per 3 e per 7, il prodotto proposto si riduce ad uno di tre fattori; ma allora in esso il fattore 9 si può far passare in mezzo, quindi si avrà,

$$(8 \times 2)(5 \times 3 \times 7)9 = (8 \times 2)9(5 \times 3 \times 7) = 8 \times 2 \times 9 \times 5 \times 3 \times 7.$$

Se l'ultimo fattore 9 si volesse far passare al primo posto, vi si giunge più facilmente riducendo il prodotto dato ad un altro di due fattori, il secondo de' quali sia 9, ed il primo si componga da tutti gli altri fattori, tal che si avrà,

$$8 \times 2 \times 5 \times 3 \times 7 \times 9 = (8 \times 2 \times 5 \times 3 \times 7)9;$$

quindi invertendo l'ordine de' due fattori nel prodotto $(8 \times 2 \times 5 \times 3 \times 7)9$, ne verrà,

$$8 \times 2 \times 5 \times 3 \times 7 \times 9 = 9(8 \times 2 \times 5 \times 3 \times 7) = 9 \times 8 \times 2 \times 5 \times 3 \times 7.$$

Se poi il fattore che vuol trasferirsi da un luogo ad un altro fosse un fattore intermedio, esso si porterà prima all'ultimo posto, e poi gli si farà occupare quel sito che piacerà, come si è fatto, rispetto al fattore 9.

Per far passare il fattore intermedio all'ultimo posto, si dividerà il prodotto dato in tre gruppi di fattori, il primo de'quali si componga di tutti quelli a sinistra del fattore intermedio; il secondo sia il semplice fattore intermedio, ed il terzo si componga da tutti i fattori a dritta di quello intermedio. Così, per esempio, il fattore 3 si farà passare all'ultimo posto, riducendo il prodotto dato ad un altro di tre fattori nel modo predetto, tal che si avrà,

$$8 \times 2 \times 5 \times 3 \times 7 \times 9 = (8 \times 2 \times 5)3(7 \times 9);$$

poi nel prodotto $(8 \times 2 \times 5)3(7 \times 9)$ facendo passare il fattore 3 all'ultimo posto, ne verrà,

$$8 \times 2 \times 5 \times 3 \times 7 \times 9 = (8 \times 2 \times 5)(7 \times 9)3 = 8 \times 2 \times 5 \times 7 \times 9 \times 3 (*).$$

59. *I numeri che hanno zeri a dritta possono moltiplicarsi fra loro senza tener conto di questi zeri; ma poi debbono aggiungersi alla dritta del prodotto, che si ottiene, altrettanti zeri quanti ve n' erano alla dritta di ambedue i fattori.*

Sia, per esempio, il numero 28000 da moltiplicarsi per 4100, dico che una tal moltiplicazione può farsi multipli-

(*) Questa verità non si può far dipendere immediatamente dall'altra consimile relativa a due soli fattori, come taluno ha creduto fare; mentre poi nel corso della sua dimostrazione ha dovuto ammettere che $7 \times 15 = 7 \times 5 \times 3$, la qual cosa bisognava che fosse stata prima dimostrata. Inoltre il ragionamento deve farsi in modo che un fattore occupi tutte le posizioni, senza che si turbi l'ordine di successione degli altri fattori.

ando 28 per 41, ed aggiungendo poi cinque zeri a dritta del prodotto.

Dim. Difatti, poichè $28000 = 28 \times 1000$, e $4100 = 41 \times 100$ n.º (49); ne verrà $28000 \times 4100 = 28 \times 1000 \times 41 \times 100$; quindi, in virtù del precedente teorema, si avrà

$$28 \times 1000 \times 41 \times 100 = 28 \times 41 \times 1000 \times 100;$$

cioè, si ottiene il cercato prodotto moltiplicando prima 28 per 41, e poi il risultato che ne nasce per 1000, ed indi il nuovo risultato per 100; il che sappiamo che si fa aggiungendo 5 zeri alla sua dritta, cioè tanti quanti ve n'erano a dritta di ambedue i fattori.

Prova della moltiplicazione

60. *La prova della moltiplicazione può farsi scindendo il moltiplicando in due parti, e formando separatamente i prodotti di ciascuna di queste parti pel moltiplicatore; ma per non eseguire le moltiplicazioni de' numeri semplici nello stesso senso di prima, si prenderà il moltiplicatore per moltiplicando; si avranno così due prodotti parziali che uniti insieme formeranno il prodotto totale; laonde questo secondo prodotto dovrà essere uguale al prodotto totale primitivo, se le operazioni sono state ben eseguite.*

Così, per esempio, dovendosi moltiplicare 348 per 271, eseguendo l'operazione, si trova per prodotto 94308. Ma per assicurarsi se il prodotto ottenuto è esatto, divideremo il moltiplicando nelle due parti 300 e 48, e poi moltiplicheremo queste due parti per 271, prendendo 271 per moltiplicando. Effettuando le operazioni, come qui appresso si vede, otterremo per prodotti parziali i due numeri 81300, 13008; e poscia addizionando i detti prodotti parziali, dovrà risultarne per somma il prodotto totale 94308 ottenuto con la prima moltiplicazione, come difatti avviene.

271	271
300	48
81300	2168
13008	1084
94308	13008

A R T. VII.

DIVISIONE DE' NUMERI INTERI

61. La *divisione* è quella operazione aritmetica in cui, essendo dato un prodotto ed un suo fattore, si vuol trovare l'altro fattore.

Il prodotto dato si chiama *dividendo*; il fattore noto si chiama *divisore*: ed il fattore ignoto si chiama *quoziente* (*).

Or poichè il dividendo si compone del quoziente ripetuto tante volte quante unità sono nel divisore, cioè, si divide in tante parti uguali al quoziente quante sono le unità del divisore; ed inoltre poichè il dividendo contiene il divisore tante volte quante unità sono nel quoziente; ne seguita che nella divisione de' numeri interi, il problema il quale si risolve può anche enunciarsi nelle due seguenti maniere.

1. Dividere un numero in tante parti uguali quante unità sono in un altro numero dato.

2. Essendo dati due numeri disuguali, trovare quante volte il maggiore contiene il minore.

(*) La parola *quoziente* deriva dal latino *quòties* che significa quante volte; imperocchè esso dinota quante volte il divisore è contenuto nel dividendo.

62. Per indicare che un numero deve dividersi per un altro, si fa uso di una linea, scrivendo il dividendo sopra, ed il divisore sotto della stessa; ovvero si fa uso di due punti posti l'uno sotto l'altro, mettendo il dividendo a sinistra, e il divisore a dritta de' medesimi. Tanto la linea quanto i due punti si leggono *diviso per*. Così, per esempio, volendosi indicare che 8 deve dividersi per 4, si scriverà $\frac{8}{4}$, ovvero 8:4; e si leggerà 8 *diviso per* 4.

64. Allorchè un numero maggiore è uguale ad un altro minore preso un numero *intero* di volte, il maggiore si dice *multiplo* o *multiple* del minore; e viceversa il minore si dice *summultiplo*, *summultiple*, o *parte aliquota* del numero maggiore. Così, per esempio, 20 è multiple di 4, e 4 è parte aliquota di 20.

64. Allorchè il dividendo non è un multiple del divisore, se questo si ripeta 1, 2, 3 volte, ec. finchè il prodotto che ne nasce giunga la prima volta a superare il dividendo, si avranno diversi multipli del divisore, i quali tutti si contengono nel dividendo, ed è chiaro che il penultimo sarà il *maggior multiple* del divisore contenuto nel dividendo.

Così, per esempio, se 34 fosse il dividendo e 5 il divisore; e 5 si prenda 1, 2, 3 volte, sino a 7 volte, cioè sino a che si abbia un prodotto il quale giunga la prima volta a superare il dividendo, si avranno i prodotti 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, i quali sono diversi multipli di 5; e tutti questi sono contenuti in 34 meno che l'ultimo 35. Ora il penultimo 30 è il *maggior* fra tutti i multipli di 5 contenuti nel dividendo. Ciò premesso:

Allorchè il dividendo non è un multiple del divisore, l'eccesso del dividendo sul maggior multiple del divisore contenuto nel dividendo si chiama *resto della divisione*, ovvero *avanzo*.

Nella divisione de' numeri interi allorchè il dividendo è un

multiplice del divisore, essa non conducendo a resto si dice esatta; e il dividendo si dice di esser *divisibile esattamente* pel divisore.

65. Nella divisione de' numeri interi distingueremo due casi.

1. Quando il dividendo è numero composto e il divisore è numero semplice.

2. Quando il dividendo e il divisore sono ambedue numeri composti.

PRIMO CASO

Divisione di un numero composto per un numero semplice.

66. Per dividere un numero composto per un numero semplice, si vegga quante volte il divisore è contenuto nel numero rappresentato dalla prima o dalle due prime cifre a sinistra del dividendo, secondo che può o non può contenersi nella prima cifra, e si ritenga a memoria l'avanzo; la cifra, che denota quante volte il divisore è contenuto nel suddetto numero, sarà quella dell'ordine più alto del quoziente. Poi l'avanzo si concepisca posto innanzi la cifra seguente del dividendo, e nel numero che viene a formarsi si vegga quante volte è contenuto il divisore, ritenendo sempre a memoria l'avanzo; la cifra, che denota quante volte il divisore è contenuto nel detto numero, sarà la seconda cifra del quoziente. Similmente si proseguirà sino a che sieno esaurite tutte le cifre del dividendo. Se poi nel corso dell'operazione si giunga ad un dividendo parziale in cui non vi è contenuto il divisore, si pone prima un zero nel quoziente, ed indi si prosegue l'operazione come se allora cominciasse.

Sia, per esempio, da dividersi il numero 43897 per 6.

L'operazione s' intavola comè si vede quì a fianco , e si dirà: il 6 in 43 è contenuto 7 volte con l'avanzo 3; dunque 7 è la prima cifra del quoziente, la quale si scrive sotto la cifra 5 del dividendo, e l'avanzo 3 posto innanzi la cifra 8, che vien dopo la cifra 5 del dividendo, fa 38. Poi si dirà: il 6 in 38 è contenuto 6 volte con l'avanzo 2; dunque 6 è la seconda cifra del quoziente, la quale si scrive sotto la cifra 8 del dividendo, e l'avanzo 2 posto innanzi la cifra 9, che vien dopo la cifra 8 del dividendo, fa 29. Indi si dirà: il 6 in 29 è contenuto 4 volte con l'avanzo 5; dunque 4 è la terza cifra del quoziente, la quale si scrive sotto la cifra 9 del dividendo, e l'avanzo 5 posto innanzi la cifra 7, che vien dopo la cifra 9 del dividendo, fa 57. Infine si dirà: il 6 in 57 è contenuto 9 volte con l'avanzo 3; dunque 9 è la quarta cifra del quoziente, la quale si scrive sotto la cifra 7 del dividendo. E poichè non vi sono più cifre nel dividendo, 3 è l'ultimo avanzo, ossia il *resto della divisione*, il quale si scrive sotto il divisore; ed il numero 7649 è il quoziente cercato.

67. Sia per secondo esempio il numero 92610 da dividersi per 3.

Eseguendo la divisione come si vede quì di contro, si dirà: Il 3 in 9 è contenuto 3 volte con l'avanzo zero; dunque 3 è la prima cifra del quoziente, la quale si scrive sotto la cifra 9 del dividendo, e l'avanzo zero posto innanzi la cifra 2, che vien dopo la cifra 9 del dividendo, fa 2. Il 3 in 2 non è contenuto; perciò si mette prima un zero nel quoziente, e poi si dirà: il 2 posto innanzi la cifra 6, che vien dopo la cifra 2 del dividendo, fa 29. Il 3 in 26 è contenuto 8 volte con l'avanzo 2; si scrive 8 nel quoziente, e l'avanzo 2 posto innanzi alla cifra 1 fa 21. Il 3 in 21 è contenuto 7 volte con l'avanzo ze-

$$\begin{array}{r|l} \text{dividendo } 45897 & 6 \text{ divisore} \\ \text{quoziente } 7649 & 3 \text{ resto} \end{array}$$

$$\begin{array}{r|l} 92610 & 3 \\ \hline 30870 & 0 \end{array}$$

ro; si scrive 7 nel quoziente, e l'avanzo zero posto innanzi alla cifra zero, che vien dopo la cifra 1^a del dividendo, fa zero. Il 3 in 0 non è contenuto; perciò si mette un zero nel quoziente. E poichè non vi sono più cifre nel dividendo, e l'ultimo avanzo è zero, la divisione è riuscita esatta; ed il numero 30870 è il quoziente cercato.

Dimostrazione relativa alla regola della divisione di un numero composto per un numero semplice, applicata agli esempi de' due numeri precedenti.

Sia da dividersi il numero 45897 per 6.

68. Intavolando l'operazione come si vede qui di contro, osserviam primieramente che, il dividendo essendo un prodotto che nasce dal moltiplicare il quoziente pel divisore, le unità più alte del quoziente saranno dello stess'ordine di quelle rappresentate dalle prime cifre a sinistra del dividendo le quali formano un numero che giunge a contenere il divisore.

$$\begin{array}{r|l} 45897 & 6 \\ \hline 7649 & 3 \end{array}$$

Così nel nostro esempio, le due prime cifre a sinistra del dividendo formando il numero 45 che contiene il divisore 6, ed il numero 45 dinotando migliaia, le unità più alte del quoziente saranno pure migliaia. Difatti esso contiene almeno un migliaio, perchè 1 migliaio moltiplicato pel divisore 6 darà 6 migliaia, le quali si contengono nel dividendo dove ne sono 45. Né il quoziente potrà contenere unità di un ordine più elevato; poichè, se una sola decina di migliaia contenesse, questa moltiplicata pel divisore darà 6 decine di migliaia, mentre nel dividendo non ve ne sono che 4.

Or poichè abbiamo scoperto che la cifra dell'ordine più alto del quoziente dinota migliaia, ne dedurremo che esso avrà quattro cifre; quindi dobbiamo trovare queste quattro cifre. Ma noi per ora non possiamo conoscere che la sola cifra delle migliaia, poichè è manifesto che le migliaia del quozien-

te debbono esser tante che moltiplicate per 6 devono dare il più gran numero di migliaia contenuto in 45 che possa ottenersi con questa moltiplicazione ; perciò si dirà :

Il 6 in 45 è contenuto 7 volte con l'avanzo 3 : dunque 7 è la cifra delle migliaia del quoziente.

Trovata la cifra 7 delle migliaia del quoziente, è manifesto che, se essa si moltiplichi pel divisore, ed il prodotto 42 si tolga dalla 45 migliaia del dividendo, nelle centinaia che vi rimangono sarà contenuto il prodotto delle centinaia del quoziente pel divisore; quindi troveremo la cifra delle centinaia del quoziente vedendo quante volte il divisore è contenuto nelle centinaia che restano nel dividendo. Ma egli è chiaro che le centinaia le quali restano nel dividendo si ottengono subito unendo le 3 migliaia di avanzo alle 8 centinaia; quindi per trovare la cifra delle centinaia del quoziente si dirà: l'avanzo 3 posto innanzi ad 8 fa 38; il 6 in 38 è contenuto 6 volte con l'avanzo di 2 centinaia, dunque 6 è la cifra delle centinaia del quoziente.

Similmente ragionando si troverà la cifra delle decine, dicendosi : l'avanzo 2 centinaia posto innanzi a 9 decine fa 29 decine ; il 6 in 29 è contenuto 4 volte con l'avanzo di 5 decine ; dunque 4 è la cifra delle decine del quoziente.

Finalmente si troverà la cifra delle unità, dicendosi : l'avanzo 5 decine posto innanzi a 7 unità fa 57 unità; il 6 in 57 è contenuto 9 volte con l'avanzo di 3 unità ; dunque 9 è la cifra delle unità del quoziente.

Ora essendosi ottenuto per resto 3, ne dedurremo che il dividendo non è il prodotto esatto di 6 per un altro numero intero ; ma se si moltiplica il quoziente pel divisore, si avrà il maggior multiplo di 6 contenuto nel dividendo, così che il dividendo supera di 3 unità il detto multiplo.

69. Allorché nel corso dell'operazione si giunge ad un dividendo parziale, che non contiene il divisore, ciò significa

che il quoziente non contiene unità dell'ordine di quelle del dividendo parziale; quindi in tal caso si pone prima un zero nel quoziente per dinotare che vi mancano le unità di quell'ordine, e poi si prosegue l'operazione come se allora cominciasse.

Così, per esempio, dovendosi dividere il numero 92610 per 3.

Qui il divisore 3 essendo contenuto 3 volte nella prima cifra 9 a sinistra del dividendo, la quale dinota decine di migliaia, la cifra dell'ordine più alto del quoziente dinoterà pure decine di migliaia; quindi per trovarla si dirà: il 3 in 9 è contenuto 3 volte senza avanzo, dunque 3 è la cifra delle decine di migliaia del quoziente.

$$\begin{array}{r|l} 92610 & 3 \\ \hline 30870 & 0 \end{array}$$

Ma passando poi a trovare la cifra delle migliaia, scorgiamo che il divisore 3 non è contenuto nella cifra 2 delle migliaia rimaste nel dividendo, quindi si conchiude che il quoziente non può contenere migliaia: difatti se un migliaio contenesse, questo moltiplicato pel divisore 3, darebbe 3 migliaia, le quali non si contengono nelle 2 migliaia che sono rimaste nel dividendo; perciò si pone prima un zero nel posto delle migliaia del quoziente, ed indi si passa a trovare la cifra delle centinaia; quindi si dirà: le 2 migliaia di avanzo unite alle 6 centinaia fanno 26 centinaia; il 3 in 26 è contenuto 8 volte con l'avanzo 2; dunque 8 è la cifra delle centinaia del quoziente.

Poiscia si passa a trovare la cifra delle decine del quoziente, e si dirà: l'avanzo 2 posto innanzi ad 1 fa 21; il 3 in 21 è contenuto 7 volte senza avanzo: dunque 7 è la cifra delle decine del quoziente.

Infine si passa a trovare la cifra delle unità del quoziente, la quale deve esser tale che moltiplicata pel divisore dia per prodotto le unità rimaste nel dividendo; ma le unità rima-

ste nel dividendo sono zero , dunque anche zero sarà la cifra delle unità del quoziente; perciò si scrive zero nel posto delle sue unità, è così il quoziente cercato sarà il numero 30870.

In questo esempio la divisione essendo riuscita senza resto, ne dedurremo che il dividendo è il prodotto esatto del quoziente pel divisore, ossia, in altri termini, è un multiplice del divisore.

SECONDO CASO

Divisione di un numero composto per un altro numero composto.

70. *Dovendosi dividere un numero composto per un altro numero composto, si segnino alla sinistra del dividendo tante cifre finchè formino un numero che giunga a contenere il divisore, il quale numero si chiama primo dividendo parziale; poi si vegga quante volte il divisore è contenuto in questo dividendo parziale, la cifra che denota quante volte vi è contenuto sarà quella dell' ordine più alto del quoziente; si moltiplichi questa cifra pel divisore, ed il prodotto si tolga dal primo dividendo parziale; poi a dritta del resto si abbassi la seguente cifra del dividendo, si avrà così un numero il quale sarà un secondo dividendo parziale, rispetto a cui si farà una seconda divisione per trovare la seconda cifra del quoziente; trovata questa seconda cifra, si operi riguardo ad essa come si è operato riguardo alla prima, e così si faccia sempre finchè siansi abbassate tutte le cifre del dividendo; si otterranno in tal modo tutte le rimanenti cifre del quoziente. Se mai si giungesse ad un dividendo parziale minore del divisore, allora si abbasseranno alla sua dritta una o più delle seguenti cifre del dividendo finchè divenghi maggiore del divisore; poi si metteranno altrettanti zeri nel quoziente; ed indi si proseguirà l' operazione come se allora cominciasse.*

Sia, per esempio, da dividersi il numero 195243 per 246.

Scriveremo il dividendo a sinistra del divisore come si vede qui di contro, e segnere-
mo con un apice (*) quattro cifre alla sini-
stra del dividendo, perchè tante se ne ri-
chiedgono per formare un numero che
giunga a contenere il divisore, si ha così il
numero 1952 per primo dividendo parziale.

$$\begin{array}{r|l} 195243 & 246 \\ 1722 & \text{---} \\ \hline 2304 & 793 \\ 2214 & \text{---} \end{array}$$

Poi si comincia dal vedere quante volte il
divisore è contenuto in 1952 nel seguente
modo; cioè si vede quante volte la cifra 2
a sinistra del divisore è contenuta nel nu-
mero 19 formato dalle due prime cifre a si-
nistra del dividendo parziale, e si dirà: il 2 in 19 è conte-
nuto 9 volte con l'avanzo 1; quindi 9 sarà la prima cifra a
sinistra del quoziente, purchè la cifra 4 del divisore, che
vien dopo la cifra 2, sia contenuta anche 9 volte nell'avan-
zo 1 posto innanzi alla cifra 5 del dividendo, che vien do-
po la cifra 9, cioè in 15; ma poichè 4 non è contenuto 9
volte in 15, allora la cifra 9 si diminuisce di una unità, e si
prende 8; quindi si dirà: il 2 in 19 è contenuto 8 volte con
l'avanzo 3, dunque 8 sarà la cifra dell'ordine più alto del
quoziente, purchè la cifra 4 del divisore sia contenuta anche
8 volte nell'avanzo 3 posto innanzi la cifra 5 del dividendo,
cioè in 35; e poichè 4 è contenuto 8 volte in 35 con l'avan-
zo 3, bisogna ancora assicurarsi se la rimanente cifra 6 del
divisore sia contenuta pure 8 volte in questo avanzo 3
posto innanzi la rimanente cifra 2 del dividendo parziale,
cioè in 32; ma poichè 6 non è contenuto 8 volte in 32, la
cifra 8 si diminuisce di una unità, e si prende 7; quindi si

$$\begin{array}{r} 903 \\ 738 \\ \text{---} \\ 165 \end{array}$$

(*) Chiamiamo *apice* quel segno in guisa di accento verticale
che si è posto sulla cifra 2 del dividendo, tanto più perchè questo
medesimo nome si dà ad un simile segno di cui si fa uso in algebra.

dfrà: il 2 in 19 è contenuto 7 volte con l'avanzo 5 che posto innanzi a 5 fa 55; il 4 in 55 è contenuto 7 volte con un avanzo tale che posto innanzi a 2 forma un numero dove il 6 è contenuto 7 volte; dunque 7 è la cifra dell'ordine più alto del quoziente.

Poi si moltiplicherà questa cifra pel divisore, ed il prodotto 1722 si toglierà dal dividendo parziale 1952, si avrà così per resto 230, a dritta del quale si abbasserà la cifra 4 del dividendo, che vien dopo la cifra 5, e si porrà anche un apice sulla cifra 4 per memoria di essersi già abbassata; in tal modo si otterrà il numero 2304, il quale sarà un secondo dividendo parziale, rispetto a cui si eseguirà una seconda divisione parziale come l'abbiamo fatta rispetto al primo; perciò si dirà: il 2 in 23 è contenuto 9 volte con l'avanzo 5 che posto innanzi a zero fa 50; il 4 in 50 è contenuto 9 volte con un avanzo tale che posto innanzi a 4 forma un numero in cui il 6 è contenuto 9 volte; dunque 9 è la seconda cifra del quoziente.

Si moltiplicherà questa cifra pel divisore, ed il prodotto 2214 si toglierà dal secondo dividendo parziale, si avrà così per resto 90, a dritta del quale si abbasserà l'ultima cifra 3 del dividendo; otterremo così il numero 903, il quale sarà un terzo dividendo parziale, rispetto a cui si farà una terza divisione parziale come si è fatta rispetto a' due precedenti, quindi si dirà: il 2 in 9 è contenuto 4 volte con l'avanzo 1 che posto innanzi a zero fa 10; il 4 in 10 non è contenuto 4 volte, perciò 4 si diminuisce di una unità, e si prende 3, poi si dirà: il 2 in 9 è contenuto 3 volte con l'avanzo 3 che posto innanzi a zero fa 30; il 4 in 30 è contenuto 3 volte con un avanzo tale che posto innanzi a 3, forma un numero in cui il 6 è contenuto 3 volte; dunque 3 è la terza cifra del quoziente.

Si moltiplicherà questa cifra pel divisore, ed il prodotto

788 si toglierà dal terzo dividendo parziale, si ottiene così per resto 165; e poichè non vi è altra cifra nel dividendo ad abbassare, il numero 793 sarà il quoziente cercato, e 165 il resto della divisione; cioè, vi restano altre 165 unità a dividersi in 246 parti uguali.

71. Sia per secondo esempio il numero 92974 da dividersi per 458.

Qui segneremo tre cifre a sinistra del dividendo, perchè tante se ne richieggono per formare un numero che giunga a contenere il divisore, si avrà così il numero 929 per primo dividendo parziale.

$$\begin{array}{r} 92974 \quad 458 \\ 916 \quad \text{---} \\ \hline 1374 \\ 1374 \quad \text{---} \\ \hline 0000 \end{array}$$

Poi si comincerà a vedere quante volte la prima cifra 4 a sinistra del divisore è contenuta nella prima cifra 9 a sinistra del dividendo, e si dirà: il 4 in 9 è contenuto 2 volte con l'avanzo 1, che posto innanzi a 2 fa 12; il 5 in 12 è contenuto 2 volte con l'avanzo 2, che posto innanzi a 9 fa 29; l'8 in 29 è contenuto 2 volte, dunque 2 è la cifra dell'ordine più alto del quoziente.

Si moltiplicherà questa cifra pel divisore, ed il prodotto 916 si toglierà dal dividendo parziale 929; si otterrà per resto 13, a dritta del quale si abbasserà la cifra 7 del dividendo; e così si avrà il numero 137 che sarà un secondo dividendo parziale.

Or poichè questo secondo dividendo parziale non contiene il divisore, la seconda cifra del quoziente sarà zero, perciò si porrà prima un zero nel quoziente, e poi si abbasserà a dritta del numero 137 la rimanente cifra 4 del dividendo; si avrà così il numero 1374 che sarà un terzo dividendo parziale, quindi si passerà a dividere questo terzo dividendo parziale pel divisore, perciò si dirà: il 4 in 13 è contenuto 3 volte con l'avanzo 1 che posto innanzi a 7 fa 17;

il 5 in 17 è contenuto 3 volte con l'avanzo 2 che posto innanzi a 4 fa 24; l'8 in 24 è contenuto 3 volte; dunque 3 è la terza cifra del quoziente.

Si moltiplicherà questa cifra pel divisore, ed il prodotto 1374 si toglierà dal terzo dividendo parziale, si ottiene così per resto zero, e poichè non vi è altra cifra nel dividendo ad abbassare, in questo caso la divisione riesce esatta, ed il numero 203 sarà il quoziente cercato.

Dimostrazione relativa alla regola della divisione di un numero composto per un numero composto, applicata agli esempi de' due numeri precedenti.

72. Sia da dividersi il numero 193243 per 246.

Intavolando l'operazione come si vede qui a fianco, osserviamo primieramente che, il dividendo essendo un prodotto che nasce dal moltiplicare il quoziente pel divisore, le unità più alte del quoziente saranno dello stesso ordine di quelle rappresentate dalle prime cifre a sinistra del dividendo, le quali formano un numero che giunge a contenere il divisore (*).

$$\begin{array}{r} 193243 \quad | \quad 246 \\ 1722 \quad | \quad 793 \\ \hline 2304 \\ 2214 \\ \hline 903 \end{array}$$

Così nel nostro esempio, segnando con un apice quattro cifre a sinistra del dividendo, avremo il numero 1952 che contiene il divisore 246; ed il numero 1952 denotando centinaia, le più alte unità del quoziente saranno centinaia. Difatti esso contiene almeno 1 centinaio, perchè questo moltiplicato pel divisore, darà per prodotto 246 centinaia, le quali si contengono nel dividendo dove ne sono 1952. Nè il quoziente

$$\begin{array}{r} 738 \\ \hline 165 \end{array}$$

(*) Veggasi il n.° (77).

potrà contenere unità più alte delle centinaia, perchè, se un sol migliaio contenesse, questo moltiplicato pel divisore, darebbe 246 migliaia, mentre nel dividendo non ve ne sono che 195.

Ciò premesso, avendo scoperto che la cifra dell'ordine più alto del quoziente dinota centinaia, esso avrà perciò tre cifre, che dobbiamo trovare; ma noi per ora abbiamo de' dati per trovare la sola cifra delle centinaia, poichè è manifesto che le centinaia del quoziente debbono esser tante che moltiplicate per 246 devono dare il più gran numero di centinaia contenuto in 1952 che possa ottenersi con tal moltiplicazione; quindi troveremo la cifra delle centinaia del quoziente vedendo quante volte 246 è contenuto in 1952.

Ciò potrebbe farsi per tentativi, cioè saggiando prima se 246 è contenuto 9 volte in 1952 col fare il prodotto di 246 per 9, il quale se riesce minore di 1952, 9 sarà la cifra del quoziente; ma se è maggiore, allora 9 si diminuisce di una unità, e si passa a saggiare la cifra 8, la quale se si trova più del giusto, si proseguirà a saggiare le cifre 7, 6, ec. finchè si giunga a quella che dà un prodotto non maggiore di 1952.

Ma in questi tentativi possiamo evitare le moltiplicazioni inutili riflettendo che, siccome il numero 1952 contiene il prodotto di 246 per la cercata cifra del quoziente, le unità, decine, e centinaia di 246 prese tante volte quante unità sono nella detta cifra, devono contenersi nelle unità, decine, e centinaia di 1952; perciò questa cifra si troverà cominciando dal vedere quante volte le 2 centinaia di 246 sono contenute nelle 19 centinaia di 1952; e poichè vi sono contenute 9 volte, bisogna assicurarsi se le 4 decine e le 6 unità di 246 sono contenute pure 9 volte nelle rimanenti decine ed unità di 1952; quindi si dirà:

Le 2 centinaia nelle 19 centinaia vi sono contenute 9 vol-

te con l'avanzo di 1 centinaia, che unito alle 5 decine fa 15 decine; ma le 4 decine di 246 non sono contenute 9 volte nelle 15 decine rimaste nel dividendo; dunque non è 9 la cifra del quoziente, perciò si diminuisce di una unità e si prende 8; quindi si dirà: le 2 centinaia nelle 19 centinaia sono contenute 8 volte con l'avanzo di 3 centinaia, che unite alle 5 decine fanno 35 decine; le 4 decine di 246 sono contenute anche 8 volte nelle 35 decine con l'avanzo di 3 decine, che unite alle 2 unità fanno 32 unità; ma le 6 unità del divisore non sono contenute 8 volte nelle 32 unità rimaste nel dividendo parziale; dunque non è 8 la cifra del quoziente; perciò si diminuisce di una unità, e si prende 7; quindi si dirà: le 2 centinaia nelle 19 centinaia sono contenute 7 volte con l'avanzo di 5 centinaia, che unite alle 5 decine fanno 55 decine, le 4 decine sono contenute 7 volte in 55 decine con un avanzo tale che unito alle 2 unità, forma un numero di unità in cui le 6 unità del divisore sono contenute 7 volte; dunque 7 è la cifra delle centinaia del quoziente.

Trovata la cifra 7 delle centinaia del quoziente, è manifesto che, se essa si moltiplichi pel divisore, ed il prodotto si tolga dalle 1952 centinaia del dividendo, nelle decine che vi rimangono sarà contenuto il prodotto parziale delle decine del quoziente pel divisore. Ma egli è chiaro che le decine le quali rimangono nel dividendo si ottengono con abbassare a dritta delle 230 centinaia di resto la cifra 4 delle decine; laonde le decine che vi restano saranno 2304; quindi troveremo la cifra delle decine del quoziente, vedendo quante volte il divisore è contenuto nel numero 2304, dello stesso modo che abbiám veduto quante volte il divisore era contenuto nelle 1952 centinaia; perciò si dirà: il 2 in 23 è contenuto 9 volte con l'avanzo 5, che posto innanzi a zero fa 50; il 4 in 50 è contenuto 9 volte con un avanzo tale che posto innanzi

zi a 4 forma un numero in cui il 6 è contenuto 9 volte; dunque 9 è la cifra delle decine del quoziente.

Trovata la cifra 9 delle decine del quoziente, si moltiplicherà pel divisore, ed il prodotto 2214 si toglierà dalle 2304 decine del dividendo; vi resteranno così 90 decine, a dritta delle quali abbassando la cifra 3 delle unità, si avranno 903 unità nelle quali sarà contenuto il prodotto parziale delle unità del quoziente pel divisore; laonde si otterranno le unità del quoziente dello stesso modo che si sono ottenute le centinaia e le decine; epperò si dirà: il 2 in 9 è contenuto 4 volte con l'avanzo 1 che posto innanzi a zero fa 10, il 4 in 10 non è contenuto 4 volte; perciò 4 si diminuisce di una unità, e si prende 3; poi si dirà: il 2 in 9 è contenuto 3 volte con l'avanzo 3 che posto innanzi a zero fa 30; il 4 in 30 è contenuto 3 volte con un avanzo tale che posto innanzi a 3 forma un numero in cui il 6 è contenuto 3 volte; dunque 3 è la cifra delle unità del quoziente.

Si moltiplicherà questa cifra delle unità del quoziente pel divisore, ed il prodotto 738 si toglierà dal terzo dividendo parziale; or poichè si ottiene per resto 165, ne dedurremo che il dividendo non è il prodotto esatto di 246 per un altro numero intero; ma, se si moltiplica il quoziente pel divisore, si avrà il maggior multiplo di 246 contenuto nel dividendo, così che il dividendo supera di 165 unità il detto multiplo.

73. Allorchè nel corso dell'operazione si giunge ad un dividendo parziale che non contiene il divisore, ciò significa che nel quoziente non vi sono unità dell'ordine della cifra del dividendo la quale si è abbassata; perciò in tal caso si mette prima un zero nel quoziente per dinotar la mancanza delle dette unità, e poi si abbassa la seguente cifra del dividendo, e si prosegue la divisione parziale.

Così, per esempio, dovendosi dividere il numero 92974

per 458, segneremo primieramente alla sinistra del dividendo tre cifre , perchè qui tante se ne richieggono per formare un numero che giunga a contenere il divisore ; si ha così il numero 920 per primo dividendo parziale. Poi effettuando la prima divisione parziale, come si vede qui a fianco, si trova che, dopo di essersi abbassata a dritta del primo resto 13 la cifra 7 delle decine del dividendo , il divisore non è contenuto nel secondo dividendo parziale 137 ; quindi si

92074	458
916	203
1374	
1374	
0000	

conchiude che nel quoziente non vi saranno decine, perchè se una ve ne fosse , questa moltiplicata pel divisore darebbe per prodotto 458 decine , le quali non si contengono nelle 137 decine rimaste nel dividendo.

Perciò in tal caso bisogna mettere un zero nel posto delle decine del quoziente , e poi si passa a trovare la cifra delle unità abbassando a dritta delle 137 decine rimaste nel dividendo l'altra cifra 4 delle sue unità; si avrà così per ultimo dividendo parziale il numero 1374, che diviso per 458 , dà per quoziente 3; dunque 3 sarà la cifra delle unità del quoziente.

Si moltiplicherà questa cifra pel divisore , ed il prodotto 1374 si toglierà dal terzo dividendo parziale; si ottiene così per resto zero.

In questo esempio la divisione essendo riuscita senza resto , se ne deduce che il numero 92074 è il prodotto esatto del divisore 458 per un altro numero intero , il quale si è trovato essere 203 ; ovvero , in altri termini, il dividendo è un moltiplice del divisore (*).

(*) Potrebbe dimostrarsi brevemente che il numero 195243 pareggia il prodotto del quoziente 793 pel divisore , più il resto 165 , nel seguente modo.

Osservazioni sulla divisione

74. Il resto della divisione essendo l'eccesso del dividendo sul prodotto del quoziente pel divisore, ne segue che, *il dividendo è uguale al divisore moltiplicato pel quoziente, più il resto*. Da qui nasce che

La prova della divisione può farsi moltiplicando il quoziente pel divisore, ed aggiungendo il resto al prodotto; poichè dovrà ottenersi un risultato uguale al dividendo, se l'operazione è stata ben fatta.

Così, per esempio, nel n.° (72) essendosi effettuata la divisione di 195243 per 246, ed avendo trovato per quoziente 793, e per resto 165; volendo ora assicurarci se l'operazione siasi ben eseguita, moltiplicheremo il divisore pel quoziente, ed al prodotto 195078 aggiungeremo il resto 165, e poichè si ottiene per somma il dividendo 195243, ne conchiuderemo che l'operazione è stata ben fatta.

75. Nella divisione possiamo risparmiarci di scrivere i prodotti parziali, facendo la sottrazione nello stesso tempo che si fa la moltiplicazione.

Essendosi tolti dal numero 195243 i diversi prodotti delle 7 centinaia, delle 9 decine, e delle 3 unità del quoziente pel divisore, ed essendovi rimaste infine 165 unità; ne segue che il proposto numero si compone dal prodotto di 793 pel divisore 246, e dal resto 165.

Ma questa dimostrazione sebbene vale a provare che 793 sia il cercato quoziente, non vale poi a farci scoprire il metodo da tenersi per trovarlo; cioè non ci dà la ragione per cui il problema debba risolversi in quel modo: essa solamente lo presenta risoluto, facendo vedere col fatto che il numero trovato soddisfa alle condizioni del problema, e niente più.

Così per esempio, sia il numero 78653 da dividersi per 834.

Intavolando l'operazione come si vede qui a fianco, dopo essersi ottenuta la prima cifra 9 del quoziente, si dirà: 9 per 4 fa 36, e si toglie 36 dall'ultima cifra 5 del numero 7865; ma perchè non può togliersi, la cifra 5 si farà imprestare 4 decine dalla cifra 6; perciò si toglierà 36 da 45, ed il resto 9 si scrive sotto la cifra 5 del dividendo.

$$\begin{array}{r|l} 78653 & 834 \\ 3593 & 94 \\ \hline 257 & \end{array}$$

Or poichè la cifra 6 è rimasta 2 per l'imprestito fatto, moltiplicandosi poi 9 per 3, il prodotto 27 dovrà togliersi da 2; ma noi aumenteremo prima 2 di 4 decime, cioè di tante, sicchè si abbia di nuovo la cifra 6, ed aggiungeremo pure 4 decime al prodotto 27, e si avrà 31; poi toglieremo non già 27 da 2, ma 31 da 6, ed il resto sarà lo stesso, perchè si sono aggiunte 4 unità del medesimo ordine tanto al numero che deve togliersi quanto a quello che soffre la sottrazione.

Perciò si dirà: 9 per 3 fanno 27 e 4 fanno 31, si toglie 31 da 6 cioè da 36, facendosi imprestare il 6 3 unità dalla cifra dell'ordine superiore, il resto 5 si scrive al di sotto, e si ritiene 3; cioè si ritengono a memoria le 3 unità che il 6 si ha fatto imprestare. Indi si prosegue moltiplicando 9 per 8 che fanno 72, e 3 di ritenuta fanno 75; si toglie 75 da 78, e si scrive il resto 3 al di sotto.

Poi si abbassa a dritta del resto 359 la cifra 3 del dividendo, ed il dividendo parziale 3593 che ne risulta si dividerà per 834; si otterrà così l'altra cifra 4 del quoziente, rispetto alla quale operando come si è fatto con la precedente, si dirà: 4 per 4 fanno 16, 16 da 3 non si può, ma 16 da 23, resta 7, si scrive 7 al di sotto, e si ritiene 2; poi si dirà: 4 per 3 fanno 12, e 2 di ritenuta fanno 14; 14 da 19 resta 5, si scrive 5 al di sotto e si ritiene 1; infine si dirà:

4 per 8 fanno 32 ed 1 di ritenuta 33, che tolto da 35 resta 2, il quale si scrive al di sotto. Perciò il numero 78653 diviso per 834 dà per quoziente 94, e per resto 257.

76. Allorchè nel fare le divisioni parziali, si va trovando quante volte il divisore è contenuto nel dividendo parziale, si può ritenere come giusta la cifra del quoziente, tutte le volte che si giunge a quella cifra del dividendo che dà un avanzo maggiore della cifra seguente del divisore.

Così, per esempio, dovendosi dividere 3310010 per 35889.

Intavolando l'operazione come si vede qui a fianco, si dirà: il 3 in 33 è contenuto 9 volte con l'avanzo di 6. Or questo avanzo essendo maggiore di una unità della cifra 5 che segue nel divisore, possiamo esser sicuri che la cifra 9 è la giusta cifra del quoziente; quindi la moltiplicheremo pel divisore, e toglieremo il prodotto dal dividendo parziale.

$$\begin{array}{r|l}
 3310010 & 35899 \\
 323091 & 92 \\
 \hline
 & 79100 \\
 & 71798 \\
 \hline
 & 7302
 \end{array}$$

Similmente nella seconda divisione parziale, si dirà: 3 in 7 è contenuto 2 volte con l'avanzo 1 che posto innanzi a 9 fa 19; il 5 in 19 è contenuto 2 volte con l'avanzo 9. Or questo avanzo essendo maggiore di una unità della cifra seguente 8 del divisore, siamo sicuri che 2 è la giusta cifra del quoziente; quindi potremo subito moltiplicarla pel divisore, e seguir l'operazione.

Dim. Essendosi giunto ad un avanzo maggiore della cifra seguente del divisore, l'altro avanzo, che vien dopo di questo, sarà maggiore di 9: ma una volta giunti ad un avanzo uguale a 9, o maggiore di 9, le rimanenti cifre del divisore si contengono sempre negli avanzi successivi, posti innanzi le rispettive cifre del dividendo, anche se le rimanenti ci-

fre del dividendo fossero tutte zero, e le rimanenti del divisore fossero tutte 9. Difatti, quando si è pervenuto all' avanzo 9, dovrà dirsi : 9 posto avanti a zero fa 90 ; ed il 9 in 90 è contenuto 9 volte con l' avanzo 9 che posto innanzi a zero fa 90 ; ed il 9 in 90 è contenuto 9 volte con l' avanzo 9 ; e così via discorrendo.

Per persuaderci poi come l' avanzo , il quale vien dopo quello che è più grande della cifra seguente del divisore, sia maggiore di 9; riflettiamo che, allorquando siamo giunti ad un avanzo maggiore della cifra seguente del divisore, questo avanzo dovendo essere uno de' numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, la cifra seguente del divisore sarà rispettivamente 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 ; perciò, supponendo anche il caso più sfavorevole in cui le rimanenti cifre dalla parte dritta del dividendo sieno tutte zero , e le rimanenti dalla parte dritta del divisore sieno tutte 9 ; se l' avanzo è 1 , dovrà dirsi : 1 posto avanti a zero fa 10 , il zero in 10 è contenuto quante volte si vuole con l' avanzo 10 che è maggiore di 9.

Se poi l' avanzo fosse 2 , dovrà dirsi ; il 2 posto avanti a zero fa 20 ; l' 1 in 20 è contenuto 9 volte con l' avanzo 11 che è maggiore di 9.

Se l' avanzo è 3 , dovrà dirsi : il 3 posto avanti a zero fa 30 ; il 2 in 30 è contenuto 9 volte con l' avanzo 12 che è maggiore di 9.

Similmente per gli altri avanzzi si dirà rispettivamente : il 3 in 40 è contenuto 9 volte con l' avanzo di 13. Il 4 in 50 è contenuto 9 volte con l' avanzo 14 ; e così seguitando si otterranno gli avanzzi 15, 16, 17, 18, e 19.

77. Volendo sviluppare in modo soddisfacente la ragione per cui la divisione debba cominciarsi dal segnare alla sinistra del dividendo tante cifre finchè formino un numero che giunga a contenere il divisore, riprendiamo l'esempio del n.º (72) ove si proponeva a dividere 195243 per 246.

La prima cosa che naturalmente si presenta ad osservare si è, che il quoziente dovendo essere sempre minore del dividendo, non può contenere unità di un ordine più elevato di quelle del dividendo, cioè non può contenere tutt' al più che centinaia di migliaia; per assicurarci poi se in realtà contiene centinaia di migliaia, scorgiamo chiaramente che, se uno ne contenesse, questo moltiplicato pel divisore darebbe 246 centinaia di migliaia; ma nel dividendo non ve ne sono che 1; dunque il quoziente non può contenere centinaia di migliaia.

Passiamo dunque a vedere se contiene decine di migliaia; ed osserviamo che, se una ne contenesse, questa moltiplicata pel divisore darebbe 246 decine di migliaia; ma nel dividendo non ve ne sono che 19; perciò il quoziente non può contenere decine di migliaia.

Passiamo dunque a vedere se possa contenere unità di migliaia; e scorgiamo che, se una ne contenesse, questa moltiplicata pel divisore darebbe 246 migliaia: ma nel dividendo non ve ne sono che 195; quindi il quoziente non può contenere unità di migliaia.

Passiamo ora a vedere se possa contenere unità di centinaia, ed osserviamo che, se una ne contenesse, questa moltiplicata pel divisore darebbe 246 centinaia, le quali sono contenute nel dividendo; quindi ne concluderemo che il quoziente contiene unità di centinaia.

Da questa analisi, la quale può applicarsi ad ogni esempio, se ne deduce che, per vedere quali sieno le più alte unità del quoziente, bisogna segnare a sinistra del dividendo tante cifre che giungano a formare un numero il quale contenga il divisore; le unità dinotate dalla prima cifra a dritta di quelle segnate, saranno le più alte unità del quoziente.

CAP. III.

PROPRIETÀ DE' NUMERI

ART. I.

78. Avendo fin qui esposto le quattro operazioni che riguardano i numeri interi; passiamo ora ad occuparci di ab

cune loro proprietà , necessarie per l'intelligenza di ciò che segue.

79. Se un numero divide esattamente due numeri, dividerà ancora esattamente la loro somma.

Sia, per esempio, il numero 4 che divide esattamente i due numeri 12, e 20: dico che dividerà esattamente la loro somma 32.

Dim. Difatti , poichè 4 preso un numero intero di volte dà 12, e preso anche un numero intero di volte dà 20 ; ne segue che prendendosi il primo numero intero di volte più il secondo numero intero di volte , cioè tante volte quante lo dinota l'insieme di questi due numeri interi, darà la somma di 12 e 20 ; dunque questa somma pareggia il prodotto di 4 pel numero intero che è l'insieme di quei due numeri interi ; perciò essa sarà divisibile esattamente per 4.

80. Se un numero divide esattamente due numeri disuguali, dividerà esattamente la loro differenza.

Sia, per esempio, il numero 7 che divida esattamente il numero maggiore 42 ed il numero minore 28 , il quale può considerarsi come parte di 42: dico che dovrà dividere esattamente anche la loro differenza 14, che è la rimanente parte di 42.

Dim. In effetti , poichè 7 preso un certo numero intero di volte dà tutto il numero 42, ma preso anche un numero intero di volte dà la parte 28 di 42 ; quindi è manifesto che resta a prendersi un altro numero intero di volte per finir di dare tutto il numero 42, ossia per dare l'altra parte 14 di 42; perciò 14 sarà divisibile esattamente per 7.

81. Se un numero divide esattamente una delle due parti che compongono un altro numero , è non divide esattamente

l'altra parte, nè anche potrà dividere esattamente tutto il numero.

Dim. Difatti, se dividesse esattamente tutto il numero, poichè per ipotesi divide una sua parte, per quel che si è dimostrato, dovrà anche dividere l'altra parte; ma si è supposto che non la divideva, il che è assurdo: dunque è pure assurdo che possa dividere esattamente tutto il numero.

82. Se un numero divide esattamente il fattore di un prodotto, dividerà esattamente il prodotto.

Sia, per esempio, il numero 8 che divida esattamente il fattore 32 del prodotto 32×25 : dico che dividerà pure esattamente il prodotto.

Dim. Poichè, scomponendo il fattore 32 in due fattori, uno de'quali sia il divisore 8; allora il prodotto 32×25 diverrà un prodotto di tre fattori, uno dei quali sarà il divisore 8; perciò un tal prodotto sarà divisibile per 8.

83. Se una grandezza si divida in un certo numero di parti uguali, e poi voglia dividersi in un numero di parti anche uguali, ma che sia 2, 3, 4, ec. volte maggiore; ciascuna di queste nuove parti sarà 2, 3, 4, ec. volte minore di ciascuna delle prime.

Dim. Sia, per esempio, una grandezza divisa in 12 parti uguali, e si supponga che ciascuna di queste parti sia di nuovo divisa in 4 parti uguali più piccole; è manifesto che la grandezza proposta, di queste parti più piccole ne conterrà un numero indicato da 12×4 , cioè resterà divisa in un numero di parti uguali 4 volte maggiore di prima; ma poichè ciascuna di queste nuove parti è 4 volte minore di ciascuna delle prime, ne segue che, se un numero sia diviso in 12 parti uguali, e poi si divida in un numero di parti 4 volte

maggior, ciascuna delle nuove parti sarà 4 volte minor di ciascuna delle prime.

Di qui, per contrario, si desume che, se una grandezza sia divisa in un certo numero di parti uguali indicato da un prodotto, per esempio, da 12×4 ; volendosi poi dividere in 12 parti uguali, cioè in un numero di parti 4 volte minore, ciascuna delle nuove parti sarà 4 volte maggior di ciascuna delle prime.

ART. II.

Caratteri di divisibilità de' numeri per 2, 3, 4, 5, 8, e 9.

84. Se un numero intero è divisibile esattamente per 2 si chiama numero *pari*.

Se un numero intero non è divisibile esattamente per 2, si chiama numero *dispari* o *impari* ovvero *caffo*.

Le cifre 2, 4, 6, 8, essendo tutte divisibili esattamente per 2, si chiamano *cifre pari*.

Le cifre 1, 3, 5, 7, 9, le quali non sono divisibili esattamente per 2, si chiamano *cifre dispari*.

N. B. Per evitare la frequente ripetizione della parola *esattamente*, in questo articolo e ne' due seguenti diremo *divisibile*, invece di dire *divisibile esattamente*.

85. Un numero è divisibile per 2, quando è terminato a dritta da una cifra pari o da zero.

Sia, per esempio, il numero 9356 terminato dalla cifra 6 che è pari. Dico che questo numero sarà divisibile per 2.

Dim. In effetti scomponendo il dato numero in decine ed unità, si avrà $9356 = 9350 + 6$; ma per essere $9350 = 935 \times 10$, n.°(49), ne verrà $9356 = 935 \times 10 + 6$. Ora 2 dividendo il fattore 10, dividerà pure il prodotto 935×10 , n.°(82);

ma divide anche 6 , dunque divide i due numeri 935×10 , e 6 la cui somma è 9356; perciò dividerà pure questa somma , n.°(79).

Se poi il proposto numero fosse terminato da zero , esso si decompone in due fattori , de' quali uno è 10 ; ma il fattore 10 essendo divisibile per 2 , anche il prodotto , ossia il numero proposto , sarà divisibile per 2.

Dico inoltre che i soli numeri terminati da cifre pari o da zero sono divisibili per 2.

Difatti, se si avesse per esempio il numero 239 terminato dalla cifra 9 che è dispari. Scomponendolo in decine ed unità , si avrà $239 = 230 + 9 = 23 \times 10 + 9$; ma 2 divide la parte 23×10 , e non divide l'altra parte 9 del numero proposto : dunque , nè anche potrà dividere tutto il numero , n.°(81).

86. *Un numero è divisibile per 4, quando le due ultime cifre a dritta formano un numero divisibile per 4.*

Sia, per esempio, il numero 5732 in cui le due ultime cifre formano il numero 32 divisibile per 4. Dico che anche il numero proposto sarà divisibile per 4.

Dim. Scomponendo questo numero in centinaia ed unità, si avrà $5732 = 5700 + 32 = 57 \times 100 + 32$. Ora 4 dividendo il fattore 100 , dividerà pure il prodotto 57×100 ; ma divide anche 32 ; dunque divide i due numeri 57×100 e 32 la cui somma è 5732, perciò dividerà pure questa somma.

Della stessa guisa che si è dimostrato rispetto al divisore 2, può pure provarsi rispetto al divisore 4 che i soli numeri di cui si è parlato sono divisibili per 4.

Un numero di due cifre si conosce tosto se sia divisibile per 4 , togliendone 40, 60, 80, secondo che è compreso fra 40 e 60, fra 60 ed 80, e fra 80 e 100 ; poichè la parte tolta essendo divisibile per 4 , se il resto sarà pure divisibile per 4 , anche tutto il proposto numero sarà divisibile per 4.

87. *Un numero è divisibile per 5, quando è terminato a dritta da zero o da 5.*

Dim. Poichè quando è terminato da zero, il proposto numero sarà un prodotto che ha per fattore 10; ma 5 divide il fattore 10; perciò dividerà pure il prodotto, ossia il numero proposto.

Quando poi è terminato da 5, come, per esempio, il numero 2735; allora scomponendo questo numero in decine ed unità, si avrà $2735 = 2730 + 5$; laonde può dimostrarsi in un modo simile a quello tenuto per un numero divisibile per 2, che il numero 2735 sarà divisibile per 5, e che ogn'altro numero che non è terminato da zero o da 5, non può dividersi per 5.

88. *Un numero è divisibile per 8, quando le tre ultime cifre a dritta formano un numero divisibile per 8.*

Sia, per esempio, il numero 809352 le cui tre ultime cifre formano il numero 352 divisibile per 8: dico che anche il proposto numero sarà divisibile per 8.

Dim. Difatti, somponendo il numero 809352 in migliaia ed unità, si avrà $809352 = 809000 + 352 = 809 \times 1000 + 352$; ma poichè il fattore 1000 è divisibile per 8, il prodotto 809×1000 sarà pure divisibile per 8; laonde il numero 352 dovrà essere eziandio divisibile per 8.

Il numero poi formato dalle tre ultime cifre si scorge tosto se sia divisibile per 8, togliendone quante volte si può 200 che è divisibile per 8, e poi dal resto, che sarà minore di 200, se ne toglierà quante volte si può 40 che è divisibile per 8; cioè dal numero delle decine se ne toglierà 4 quante volte si può; quindi l'ultimo resto, che dovrà vedersi se sia divisibile per 8, sarà un numero minore di 40.

Così, per esempio, il numero 795 si vede tosto se è divisibile per 8; poichè dalle 7 centinaia togliendone 200 quante volte si può, resta 195; poi da 19 decine togliendone 4 decine quante volte si può, resta 35, il quale resto non essendo divisibile per 8, né anche il numero 795 sarà divisibile per 8.

89. *Un numero è divisibile per 3 o per 9, se la somma delle sue cifre significative è rispettivamente divisibile per 3 o per 9*

Sia il numero 20475 nel quale la somma delle cifre significative è 18; essendo questa somma divisibile per 3 e per 9: dico che anche il numero 20475 sarà divisibile per 3 e per 9.

Dim. Difatti, scomponendo il numero 20475 nelle unità de' suoi diversi ordini, si avrà

$$20475 = 20000 + 400 + 70 + 5;$$

Ma essendo $10 = 9 + 1$, $100 = 99 + 1$, $1000 = 999 + 1$, ed i numeri 9, 99, 999, ec. essendo tutti divisibili per 3 e per 9, ne segue che se i numeri 10, 100, 1000, ec. si dividono per 3 o per 9, essi danno tutti per resto 1; quindi i numeri 20000, 400, 70, 5, dividendosi per 3 o per 9 danno per resti rispettivi le cifre 2; 4, 7, 5. Perciò il numero 20475, che è uguale a $20000 + 400 + 70 + 5$, darà per resto la somma delle sue cifre significative; laonde, se questa somma è divisibile per 3 o per 9, anche il proposto numero sarà divisibile per 3 o per 9 (*).

90. *Un numero dispari non è divisibile, se non che per un numero anche dispari.*

Dim. In effetti, se esso fosse divisibile per un numero pari, il proposto numero dispari sarebbe un prodotto che avrebbe un fattore pari; ma questo fattore essendo divisibile per 2, anche il prodotto, cioè il proposto numero dispari, sarebbe divisibile per 2, il che è assurdo.

(*) Quantunque la divisione potesse continuarsi riguardo a' numeri 70, e 5 le cui cifre significative non sono minori di 3, perchè il 3 vi è contenuto altre volte; pure, per maggior facilità della dimostrazione, consideriamo la divisione arrestata quando si giunge a' resti uguali alle suddette cifre.

De' numeri primi

91. Si chiamano numeri *primi* quei numeri interi che non sono divisibili esattamente se non che per sè stessi e per l'unità.

Tali sono per esempio i numeri 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, ec.

Fra i numeri pari il solo 2 è numero primo, perchè tutti gli altri sono divisibili per 2: dunque i numeri *primi* sono tutti *dispari*, *eccetto 2*.

Due numeri interi diconsi *primi fra loro* quando non evi alcun numero intero diverso dall'unità, il quale divide esattamente l'uno e l'altro de' due numeri dati.

Così, per esempio, 15 e 28 sono numeri *primi fra loro*; poichè quantunque 3 e 5 dividano 15, niuno di essi divide 28: similmente, sebbene 4 e 7 dividessero 28, niuno di loro divide 15.

Al contrario, 15 e 20 non sono numeri *primi fra loro*; perchè 5 è divisore comune di 15 e 20. Così pure 7 e 28 non sono *primi fra loro*; perchè il numero 7 divide sè stesso, e divide anche 28.

92. I numeri primi essendo tutti dispari, *eccetto 2*, ed i numeri dispari non essendo divisibili che per numeri anche dispari, n.º(90); ne segue che, se da una serie di numeri dispari consecutivi, a contar dall'unità, se ne escludono tutti quelli che sono divisibili per 3, per 5, per 7, ec., meno che quelli i quali sono divisibili solamente per sè stessi, tutti gli altri numeri dispari, che vi rimangono, saranno numeri primi (*).

(*) Nella terza parte di questi elementi vedremo un mezzo fa-

Si può avvertire che nel processo dell'operazione è inutile tentare le divisioni per i numeri dispari multipli, come per 9, per 15, ec.; perchè, se le divisioni per questi numeri fossero eseguibili, si sarebbero potute eseguire anche per i numeri 3 e 5 di cui sono multipli, n.° (82); ma le divisioni per questi ultimi trovandosi già fatte, e non essendo riuscite esatte, non potranno nè anche riuscire esatte quelle per i loro multipli.

Decomposizione di un numero in fattori semplici o primi.

93. Un numero se non è primo, sarà almeno il prodotto di due fattori; e se questi fattori nè anche sono numeri primi, ciascuno sarà pure il prodotto di due altri fattori; e dicendo lo stesso rispetto a questi fattori, dovrà giungersi finalmente a fattori tali che non sono più decomponibili in altri fattori: questi ultimi fattori diconsi perciò fattori *semplici o primi* del numero proposto. Ciò premesso:

Sia per esempio il numero 34500 che voglia scomporsi in fattori primi.

L'operazione s'intavola come qui si vede.

Si comincia dal dividere il proposto numero 34500 | 2
per 2, che è il più semplice numero primo, 17250 | 2
scrivendo il divisore 2 a fianco al dividendo, e 8625 | 3
al di sotto del dividendo si scrive il quoziente 2875 | 5
17250. 575 | 5

Poi scorgendosi che il quoziente 17250 è pure divisibile per 2, si dividerà per 2, ed il quoziente 8625 si scrive al di sotto di 17250. 115 | 5
23 | 23

Il quoziente 8625 non essendo divisibile per 2, si divi-

cile per trovare tutti i numeri primi compresi in una serie di numeri dispari consecutivi, senza bisogno di eseguir divisioni. Vi troveremo inoltre altre particolarità intorno a' numeri primi.

derà per 3, che è il numero primo immediatamente più grande di 2, ed il quoziente 2875 si scrive al di sotto.

Il quoziente 2875 non essendo divisibile più per 3, si dividerà per 5, che è il numero primo immediatamente più grande di 3, ed il quoziente 575 si scrive al di sotto.

Poi scorgendosi che questo quoziente è divisibile pure per 5, si dividerà per 5, ed il quoziente 115 si scrive al di sotto.

Il quoziente 115 essendo di nuovo divisibile per 5, si dividerà per 5, ed il quoziente 23 si scrive al di sotto.

Il quoziente 23 non essendo divisibile per 5, si dividerà per 7, che è il numero primo immediatamente più grande di 5; ma non essendo divisibile per 7, si dividerà per 11, numero primo immediatamente più grande di 7; così seguendo, non si troverà divisibile nè per 11, nè per 13, nè per 17, nè per 19; ma si troverà divisibile solamente per sè stesso; quindi se ne conchiude che il quoziente 23 è numero primo (*).

Dunque il numero 34500 è decomponibile ne' fattori primi che trovansi tutti scritti a dritta della linea; mentre a sinistra sono scritti i quozienti. In effetti si ha

$$34500 = 2 \times 17250 = 2 \times 2 \times 8625 =$$

$$2 \times 2 \times 3 \times 2875 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 575 =$$

$$2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 115 = 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5 \times 23 (**).$$

(*) Vedremo nella terza parte di questi elementi che vi è un limite dove dobbiamo arrestarci per evitare le divisioni inutili. Così nel nostro esempio, supposto che non avessimo conosciuto di essere 23 numero primo, il limite dove dovevamo arrestarci nel fare le divisioni sarebbe stato il divisore 3; cioè dopo tentata la divisione per 3, non essendo questa riuscita esatta, potevamo conchiuderne di esser 23 un numero primo, senza bisogno di tentare ulteriori divisioni per 5, per 7, ec.

(**) Il modo tenuto per decomporre un numero nei suoi fattori primi non può dirsi, senza prima dimostrarlo, di essere il solo

Proprietà de' divisori comuni a due numeri.

94. Se un numero intero divide esattamente due altri numeri interi , vien detto *divisor comune* di questi numeri.

95. Ogni *divisor comune* a due numeri sarà comune anche al resto che si ottiene dividendo il maggiore di essi pel minore; ed ogni comun divisore al numero minore ed al resto, sarà anche comune al numero maggiore.

Siano , per esempio , i due numeri 4823 e 798.

Dividendo il maggiore pel minore, si avrà per quoziente 6, e per resto 35. Or poichè sappiamo che il dividendo pareggia il divisore moltiplicato pel quoziente, più il resto, si avrà la seguente eguaglianza.

$$4823 = 798 \times 6 + 35,$$

dalla quale si scorge che 4823 è la somma de' due numeri 798×6 e 35, e che 35 è la differenza fra i due numeri 4823 e 798×6 .

Ciò posto, il comun divisore di 4823 e 798 deve dividere anche il prodotto 798×6 , perchè divide il fattore 798; dunque allora divide i due numeri 4823 e 798×6 , perciò dovrà pure dividere la loro differenza 35 , n.º(80) , ossia il resto della divisione.

modo possibile di far questa decomposizione, e quindi conchiuderne , come ha fatto taluno , che un numero non è decomponibile che in un sol sistema di fattori primi. Senza una rigorosa dimostrazione, noi non possiamo conoscere se il prodotto 2. 2. 3. 5. 5. 23 sia divisibile esattamente per un altro numero primo diverso dai fattori primi ne' quali l'abbiamo decomposto. Una tal dimostrazione si troverà nella terza parte di questi elementi.

Passiamo ora a far vedere che ogni comun divisore al divisore ed al resto sarà pur comune al dividendo.

Difatti il comun divisore di 798 e 35 deve anche dividere il prodotto 798×6 , perchè divide il fattore 798: dunque allora divide i due numeri 798×6 e 35, perciò dovrà pure dividere la loro somma che è 4823, n.º(79), ossia il dividendo.

96. *Il MASSIMO COMUN DIVISORE di due numeri sarà pure massimo comun divisore del numero minore e del resto della loro divisione (*)*.

Dim. Difatti, il dividendo, il divisore, e il resto sono tre numeri rispetto a' quali si è dimostrato che ogni comun divisore al primo ed al secondo è pur comune al secondo ed al terzo, e viceversa. Ciò posto, supponiamo, se mai è possibile, che il massimo comun divisore del primo e secondo non sia uguale a quello del secondo e terzo, e supponiamo per esempio che quello del primo e secondo sia minore di quello del secondo e terzo; allora quello del secondo e terzo che si vuole maggiore, dovendo dividere il primo ed il secondo numero, questi due numeri avrebbero un comun divisore uguale al massimo comun divisore del secondo e terzo; cioè avrebbero un comun divisore maggiore del loro supposto massimo comun divisore il che è assurdo.

(*) Abbiamo creduto inutile dar la definizione del massimo comun divisore di due numeri, perchè questa definizione si riduce a quella della parola *massimo* che i giovanetti conoscono essere il superlativo di *grande*. Se poi dal maestro si credesse necessaria, gli costerà ben poco a far capire che il massimo comun divisore di due o più numeri è il più grande divisor comune di questi numeri.

A R T. IV.

Ricerca del massimo comun divisore fra due numeri.

97. Dovendosi trovare il massimo comun divisore fra due numeri, si divida il numero maggiore pel minore; se vi è resto, si faccia una seconda divisione, prendendo il divisore della prima per dividendo, e il resto per divisore; se in questa divisione vi è pure un resto, si farà una terza divisione, prendendo il divisore della seconda per dividendo, e il resto per divisore; similmente si proseguirà finchè si giunga ad una divisione senza resto; il divisore di quest' ultima divisione esatta, sarà il massimo comun divisore cercato.

Sieno, per esempio, i numeri 4823 e 798 fra i quali debba trovarsi il loro massimo comun divisore.

Si dividerà il numero maggiore 4823 pel minore 798, e l'operazione s'intavola situando i quozienti delle divisioni al di sopra de' rispettivi divisori, come si vede qui a fianco.

Or poichè si ottiene per resto 35, si passerà a dividere il divisore 798 pel resto 35; ed in questa seconda divisione ottenendosi anche un resto, che è 28, si passerà a divide-

	6	22	1	4
4823	798	35	28	7
4788	70	28	28	
35	98	7	00	
	70			
	28			

re il divisore 35 pel resto 28; e poichè in questa terza divisione si ottiene pure un resto, che è 7, si passerà a dividere 28 per 7; ma quest' ultima divisione riuscendo esatta, ne segue che 7 è il massimo comun divisore cercato.

Dim. È chiaro che se il numero minore dividesse esattamente il maggiore, il numero minore sarebbe il cercato mas-

simo comun divisore: sarebbe comune, perchè divide il maggiore e divide sè stesso, sarebbe poi massimo, perchè un numero non può avere un divisore più grande di sè stesso.

Per vedere adunque se il numero minore fosse il massimo comun divisore de' due numeri dati, bisogna dividere il maggiore pel minore; eseguendo la divisione, poichè si ottiene per resto 35, ne conchiuderemo che il numero minore non può essere il massimo comun divisore fra i due numeri dati; ma perchè sappiamo che il massimo comun divisore di 4823 e 798 è pure massimo comun divisore di 798 e del resto 35, n.º (96), passeremo a trovare il massimo comun divisore fra 798 e 35, quindi per la stessa ragione detta poc' anzi, divideremo il numero maggiore 798 pel minore 35; eseguendo la divisione, ed ottenendosi per resto 28, non sarà dunque 35 il massimo comun divisore fra i due numeri proposti, perciò passeremo a dividere 35 per 28; effettuando la divisione, ed ottenendosi per resto 7, neppure 28 sarà il massimo comun divisore fra i due numeri proposti; quindi passeremo a dividere 28 per 7; eseguendo la divisione, poichè riesce esatta, ne conchiuderemo che 7 è il massimo comun divisore fra i due numeri proposti.

Tenendo sott'occhio il quadro dell'operazione, ove sono scritti l'uno dopo l'altro i due numeri proposti ed i resti successivi, la dimostrazione potrà riepilogarsi nel seguente modo.

Il massimo comun divisore di 4823 e 798 è lo stesso che quello di 798 e 35; quello di 798 e 35 è lo stesso che quello di 35 e 28; quello di 35 e 28 è lo stesso che quello di 28 e 7; ma 7 è il massimo comun divisore di 28 e 7; dunque 7 sarà pure il massimo comun divisore de' due numeri proposti.

Avvertimento. Allorquando il divisore dell'ultima divisione esatta è l'unità; i numeri proposti non avendo divisore comune più grande dell'unità; se ne conchiude che essi sono *primi fra loro*.

98. Allorquando si giunge ad una divisione dove si vede a colpo d'occhio che il dividendo e il divisore sono numeri

primi fra loro , è inutile proseguire innanzi l'operazione : e fin d' allora può conchiudersi che i due numeri proposti non hanno massimo comun divisore più grande dell' unità , ond' è che sono *primi fra loro*.

Così, per esempio, se occorresse trovare il massimo comun divisore fra i due numeri 853 e 92 : dividendo 853 per 92 si ottiene per resto 25; ma poichè si scorge a colpo d'occhio che questi due numeri sono primi fra loro , senza proseguir oltre l'operazione, se ne conchiuderà che i due numeri proposti sono anche primi fra loro.

99. *Ogni comun divisore a due numeri, dovrà anche dividere il loro massimo comun divisore.*

Dim. In effetti , operando su i due numeri dati come se si dovesse trovare il loro massimo comun divisore ; ogni comun divisore a' detti numeri dovrà dividere tutti i resti delle divisioni, n.º (95); quindi dovrà anche dividere il resto della penultima divisione , che è il divisore dell' ultima divisione, ossia il massimo comun divisore de' due numeri proposti.

C A P. IV.

Delle frazioni.

A R T. I.

100. Nel principio di questi elementi , dove faceva uopo distinguere i numeri in *interi* e *fratti*, accennammo un' idea delle frazioni, ma dovendo ora trattare di proposito del calcolo delle frazioni, convien meglio precisare ciò che gli aritmetici intendono per frazione.

Allorchè l' unità si suppone divisa in più parti uguali ,

quel numero che esprime una o più di queste parti si chiama *fratto*, *frazione*, ovvero *rotto*.

101. Le parti in cui si suppone divisa l'unità, secondo che esse sono due, tre, ec. fino a dieci, si chiamano *mezzi*, *terzi*, *quarti*, *quinti*, *sesti*, *settimi*, *ottavi*, *noni*, *decimi*; se poi sono più di dieci, come, per esempio, undici, dodici, ec., si aggiunge la desinenza *esimi* al numero che dinota in quante parti uguali si suppone divisa l'unità, dicendosi *undicesimi*, *dodicesimi*, ec. Perciò, se l'unità volesse dividersi in 5 parti uguali, ed occorresse prenderne 3, si avrà la frazione *tre quinti*: così pure, se l'unità voglia dividersi in 23 parti uguali, e bisogni prenderne 12, si avrà la frazione *dodici ventitreesimi*: dunque

Per rappresentare una frazione si richiedono necessariamente due numeri, uno per denominare in quante parti uguali si suppone divisa l'unità, e l'altro che numera quante di queste parti bisogna prendere.

Quel numero che denomina in quante parti uguali si suppone divisa l'unità si chiama *denominatore*.

Quello che numera quante di queste parti bisogna prendere, si chiama *numeratore*.

Il numeratore e il denominatore hanno il nome comune di *termini* della frazione.

102. Una frazione si scrive col numeratore sopra il denominatore, frapponendovi una linea.

Così, per esempio, la frazione *tre quinti* si scrive $\frac{3}{5}$, e la frazione *dodici ventitreesimi* si scrive $\frac{12}{23}$, ec.

Avvertimento. Vedremo in breve che ogni frazione equivale al quoziente della divisione del numeratore pel denominatore; perciò la linea che separa l'uno dall'altro, non solo dinota la frazione nel senso che l'abbiamo definita, ma

conserva ben anche lo stesso significato di divisione , che le assegnammo nel n.° (62).

103. Si chiama *frazione vera* ogni frazione che ha il numeratore minore del denominatore ; perchè essa, contenendo un numero di parti minore di quello in cui l'unità è stata divisa , è *minore* dell' unità.

104. Si chiama *frazione spuria*, o *numero frazionario* ogni frazione che ha il numeratore uguale o maggiore del denominatore , perchè essa , contenendo un numero di parti uguale o maggiore di quello in cui l'unità è stata divisa, sarà rispettivamente uguale o maggiore dell' unità (*).

105. La frazione che ha il numeratore uguale al suo denominatore , essendo uguale all' unità , ne segue che l'unità può scriversi sotto forma di frazione , che abbia per numeratore e denominatore uno stesso numero qualunque.

Così, per esempio, le frazioni $\frac{5}{5}$, $\frac{8}{8}$, $\frac{29}{29}$, $\frac{33}{33}$, sono tutte uguali all' unità.

106. Dalla definizione della frazione , del suo numeratore , e del suo denominatore risulta che

Ogni frazione differisce dall' unità di tante di quelle parti in cui l' unità è stata divisa , quante ne indica la differenza che passa fra il numeratore ed il denominatore.

Così, per esempio, la frazione vera $\frac{7}{11}$, è minore dell' unità di $\frac{4}{11}$, cioè di tanti 11.^{mi} quanti ne dinota la differenza tra il numeratore 7 ed il denominatore 11. E la frazione spu-

(*) La frazione vera suole anche chiamarsi *frazione propria* o *legittima* ; e le frazione spuria suole pure chiamarsi *frazione impropria* o *illegittima*, ovvero *espressione frazionaria*; e si suol dare il nome di *frazione apparente* ad una frazione spuria che contiene un numero intero di unità.

ria $\frac{25}{11}$ è maggiore dell'unità di $\frac{14}{11}$, cioè di tanti 11.^{mi} quanti ne denota la differenza fra il numeratore 25 ed il denominatore 11.

A R T II.

Proprietà delle frazioni.

107. *Ogni frazione equivale al quoziente della divisione in cui il numeratore fa da dividendo, ed il denominatore fa da divisore.*

Sia, per esempio, la frazione $\frac{4}{9}$; dico che essa equivale al quoziente che si ottiene dividendo 4 per 9, cioè alla nona parte di 4.

Dim. In effetti, poichè $\frac{1}{9}$ preso 9 volte dà l'unità; $\frac{4}{9}$, il quale è un numero 4 volte maggiore di $\frac{1}{9}$, preso anche 9 volte, dovrà dare 4 unità: quindi la frazione $\frac{4}{9}$ è la nona parte di 4 unità, cioè equivale al quoziente che si ottiene dividendo il numeratore 4 pel denominatore 9.

108. *Se si moltiplica o si divide il numeratore di una frazione per un numero intero, senza alterare il denominatore, la frazione verrà rispettivamente a moltiplicarsi o a dividersi per quel numero intero.*

Sia, per esempio, la frazione $\frac{8}{9}$, il cui numeratore si moltiplichi per 5. Eseguendo la moltiplicazione, ne viene la fra-

zione $\frac{40}{9}$. Ora io dico che la frazione $\frac{40}{9}$ è 5 volte maggiore della frazione $\frac{8}{9}$.

Dim. Difatti il denominatore della frazione $\frac{40}{9}$ essendo ugua-

le a quello della frazione $\frac{8}{9}$; nell'una e nell'altra frazione la medesima unità viene a dividersi nello stesso numero di parti uguali; perciò queste parti avranno tutte il medesimo valore; ma il numeratore della frazione $\frac{40}{9}$, essendo 5 volte

maggiore di quello della frazione $\frac{8}{9}$, nella frazione $\frac{40}{9}$, si viene a prendere un numero 5 volte maggiore delle stesse parti dell'unità; perciò il tutto, ossia la frazione che ne nasce, sarà pure 5 volte maggiore della prima; e quindi la prima frazione si sarà moltiplicata per 5.

Se poi il numeratore della frazione $\frac{8}{9}$, si dividesse per un numero intero, per esempio, per 4, ne viene la frazione $\frac{2}{9}$, la quale sarà 4 volte minore della frazione $\frac{8}{9}$; e quindi la frazione $\frac{8}{9}$ si sarà divisa per 4.

Difatti, poichè abbiain veduto che una frazione si moltiplica per un numero intero, moltiplicando il suo numeratore per quel numero intero; ne segue, per contrario, che essa si dividerà per un numero intero, dividendo il suo denominatore per quel numero intero.

109. *Se si moltiplica o si divide il denominatore di una frazione per un numero intero, senza alterare il numeratore, la frazione verrà rispettivamente a dividersi o a moltiplicarsi per quel numero intero.*

Sia, per esempio, la frazione $\frac{5}{8}$, il cui denominatore si moltiplichi per 9. Eseguendo la moltiplicazione, ne viene la frazione $\frac{5}{72}$. Ora io dico che la frazione $\frac{5}{72}$ è 9 volte minore della frazione $\frac{5}{8}$.

Dim. In effetti, il denominatore della frazione $\frac{5}{72}$ essendo 9 volte maggiore di quello della frazione $\frac{5}{8}$; nella frazione $\frac{5}{8}$ l'unità viene a dividersi in 8 parti uguali, e nella frazione $\frac{5}{72}$ la stessa unità viene a dividersi in un numero di parti uguali 9 volte maggiore; perciò ciascuna di queste nuove parti sarà 9 volte minore di ciascuna delle prime, n.º (83); ma il numeratore essendo rimasto lo stesso, nella frazione $\frac{5}{72}$ si viene a prendere lo stesso numero di parti dell'unità, ma che hanno un valore 9 volte minore di quello che prima avevano; perciò il tutto, ossia la frazione che ne nasce sarà pure 9 volte minore della prima frazione; quindi la prima frazione si sarà divisa per 9.

Se poi il denominatore della frazione $\frac{5}{8}$ si dividesse per un numero intero, per esempio, per 2, ne viene la frazione $\frac{5}{4}$, la quale sarà 2 volte maggiore della frazione $\frac{5}{8}$; e però la frazione $\frac{5}{8}$ si sarà moltiplicata per 2.

In effetti, poichè abbiám veduto che una frazione si divide per un numero intero moltiplicando il suo denominatore per quel numero intero; ne segue, per opposito, che essa si

moltiplicherà per un numero intero, dividendo il suo denominatore quel numero intero.

110. *Una frazione non cambia valore, tanto se si moltiplicano, quanto se si dividono i suoi due termini per lo stesso numero.*

Sia, per esempio, la frazione $\frac{8}{12}$. Moltiplicando i suoi due termini per 3, si avrà la frazione $\frac{24}{36}$ uguale alla frazione $\frac{8}{12}$; e dividendo i suoi due termini per 4, si avrà la frazione $\frac{2}{3}$ anche uguale alla proposta $\frac{8}{12}$.

Dim. Difatti noi sappiamo che moltiplicando il numeratore di una frazione per un numero intero, essa si rende tante volte maggiore quante volte lo dinota quel numero intero; ma moltiplicandosi poi il denominatore per lo stesso numero intero, essa si rende tante volte minore quante volte lo dinota il medesimo numero intero; perciò ritorna a prendere il valore primitivo.

Un ragionamento analogo fa vedere che una frazione non si altera, allorchè si dividono i suoi due termini per lo stesso numero.

111. *Corollario.* Si desume dalla precedente verità che una medesima frazione si può rappresentare con un'infinità di numeratori e denominatori diversi, senza che cambi valore; poichè moltiplicando i suoi due termini per tutti i numeri interi, i quali sono infiniti, si avranno infinite frazioni di numeratori e denominatori differenti, tutte uguali in valore alla proposta.

112. *Una frazione si avvicina o si allontana dall'unità, secondo che si aggiunge o toglie da' suoi due termini uno stesso numero.*

Dim. Difatti, aggiungendo a' suoi due termini un medesimo numero, la differenza fra il numeratore ed il denominatore rimane la stessa, perchè la differenza fra due numeri non cambia quando ad essi si aggiunge la stessa quantità; ma questa differenza esprime di quante parti dell'unità la frazione differisce dalla medesima unità, n.º (106); quindi la frazione differisce dall'unità dello stesso numero di parti che prima ne differiva; ma queste parti essendo più piccole, perchè il denominatore è divenuto più grande, ne segue che differisce meno dall'unità; epperò la frazione aumenta se è vera, diminuisce se è spuria.

Or poichè abbiain veduto che aggiungendo uno stesso numero a' due termini di una frazione, essa si accosta più all'unità; ne consegue che togliendo uno stesso numero da' due termini di una frazione, essa si discosta più dall'unità.

Corollario. Una frazione dunque tanto più si avvicina o allontana dall'unità, quanto più è grande il numero che rispettivamente si aggiunge o si toglie da' suoi due termini.

A R T. III.

Riduzione delle frazioni.

113. Vanno comprese sotto il titolo di *riduzione delle frazioni* tutte quelle operazioni che si fanno per convertire le frazioni in altre equivalenti, ma espresse con diversi termini; ovvero si fanno per trasformare le frazioni spurie negl'interi e nelle frazioni vere di cui si compongono; e viceversa.

Riduzione di una frazione a minimi termini.

114. Una frazione, senza alterarsi di valore, potendo esser rappresentata, come abbiain veduto n.º (111), con infiniti numeratori e denominatori diversi, torna utilissimo, quando è possibile, di saper trovare i termini più piccoli con i quali potesse esprimersi, il che dicesi *ridurre una frazione alla sua più semplice espressione, ovvero a minimi termini*.

Una frazione si riduce a minimi termini, dividendo il suo numeratore ed il suo denominatore, pel loro massimo comun divisore; i rispettivi quozienti che si ottengono saranno i termini della frazione proposta ridotta alla sua più semplice espressione.

Sia da ridursi a minimi termini la frazione $\frac{237}{632}$. Cercan-

do il massimo comun divisore fra i suoi due termini, con la regola del n.° (97), si troverà 79; dividendo poi per 79 i due termini della frazione proposta, si avranno per rispettivi quozienti 3 ed 8; laonde $\frac{3}{8}$ sarà la proposta frazione ridotta alla sua più semplice espressione.

Dim. In effetti, la frazione proposta non cambia valore, perchè i suoi due termini si dividono ambedue per lo stesso numero; inoltre, essa si riduce a minimi termini, perchè il divisor comune del suo numeratore e del suo denominatore, essendo il più grande possibile, i quozienti che si ottengono saranno i più piccioli possibili; e perciò la frazione si troverà ridotta alla sua più semplice espressione.

115. *Avvertimento.* Se i termini di una frazione sono numeri primi fra loro, non potendosi allora ridurre ad un'espressione più semplice, la frazione si chiama *irriducibile*.

Così, per esempio, la frazione $\frac{63}{137}$ si trova di essere irriducibile; perchè i suoi due termini sono primi fra loro.

Riduzione delle frazioni al medesimo denominatore.

116. *Più frazioni si riducono al medesimo denominatore, senza cambiar valore, moltiplicando i termini di ciascuna pel prodotto de' denominatori di tutte le altre.*



Sieno , per esempio , le frazioni $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{4}{7}$, che vogliansi ridurre al medesimo denominatore.

Moltiplicando i termini della prima pel prodotto 5×7 dei denominatori delle altre due, e quelli della seconda pel prodotto 4×7 , e quelli della terza pel prodotto 4×5 , si avranno così le seguenti frazioni

$$\frac{3 \times 5 \times 7}{4 \times 5 \times 7}, \quad \frac{2 \times 4 \times 7}{5 \times 4 \times 7}, \quad \frac{4 \times 4 \times 5}{7 \times 4 \times 5};$$

ed effettuando le operazioni indicate, si ridurranno alle frazioni $\frac{105}{140}$, $\frac{56}{140}$, $\frac{8}{140}$, le quali hanno tutte lo stesso denominatore , e sono rispettivamente uguali alle proposte.

Dim. In effetti, le proposte frazioni non cambiano valore, perchè i termini di ciascuna vengono a moltiplicarsi ambedue per lo stesso numero ; inoltre esse riduconsi al medesimo denominatore , perchè il denominatore di ognuna si forma dal prodotto de' denominatori di tutte le frazioni , e questo prodotto è sempre lo stesso, comunque si permuti l'ordine di moltiplicazione de' suoi fattori, n.º (58).

117. *Corollario.* Mediante la riduzione delle frazioni al medesimo denominatore , si giungerà a conoscere quale di due frazioni date sia la maggiore ; poichè allora, dando uno sguardo a' loro numeratori , è manifesto che sarà maggiore quella la quale si troverà avere il numeratore maggiore ; e saranno uguali , se i loro numeratori risulteranno uguali.

Così , per esempio , volendosi conoscere quale delle due frazioni $\frac{7}{11}$ e $\frac{8}{13}$ sia la più grande , bisogna prima ridurle al medesimo denominatore; e poichè le stesse divengono rispet-

tivamente uguali alle frazioni $\frac{91}{143}$ ed $\frac{88}{143}$, ne conchiuderemo di esser maggiore la frazione $\frac{7}{11}$.

118. Alle volte si scorge a colpo d'occhio che moltiplicando i due termini di una delle frazioni per qualche numero, essa può ridursi ad avere il medesimo denominatore di una altra frazione.

Così, per esempio, dovendosi ridurre al medesimo denominatore le due frazioni $\frac{4}{7}$ e $\frac{5}{21}$: vi si perviene facilmente moltiplicando i due termini della prima per 3; e si avrà la frazione $\frac{12}{21}$ che ha lo stesso denominatore dell'altra $\frac{5}{21}$.

Si può osservare che il denominatore della seconda frazione è un multiplo di quello della prima; e però, scorgiamo che quando più piccolo è un tal multiplo, tanto più semplice sarà il comun denominatore a cui possono ridursi le due frazioni.

Ciò vale anche per un numero qualunque di frazioni; e quindi possiamo conchiudere che se conoscessimo il minima moltiplice de' loro denominatori, esse si ridurrebbero ad avere questo moltiplice per comun denominatore il più semplice, moltiplicando i due termini di ciascuna frazione per quel numero che denota quante volte il rispettivo denominatore è contenuto in quel moltiplice (*).

119. Allorchè le frazioni sono due, e si scorge che i loro denominatori hanno un fattor comune; esse possono ridursi ad un denominatore più semplice del prodotto dei loro denominatori; e si perviene a ciò moltiplicando i due termini della prima pel fattore non comune del denominatore della seconda, ed i due termini della seconda pel fattor non comune del denominatore della prima.

(*) Il *minimo moltiplice* di più numeri interi si chiama anche *minimo comun dividendo* di essi numeri. Vedremo nella terza parte di questi elementi il modo come trovarlo.

Così, per esempio, nelle frazioni $\frac{8}{15}$ e $\frac{5}{6}$, scorgendosi che il denominatore della prima ha per fattori 5 e 3, e quello della seconda ha per fattori 3 e 2, e quindi essendo 3 il fattore comune, e 5 e 2 i rispettivi fattori non comuni; esse si ridurranno al medesimo denominatore moltiplicando i due termini della prima per 2, e quelli della seconda per 5; donde ne verranno le frazioni $\frac{16}{30}$ e $\frac{25}{30}$ ridotte al medesimo denominatore.

Dim. In effetti, in tal modo operando, il denominatore della prima acquista quel fattore che esso non ha, e che trovasi in quello della seconda; e viceversa, il denominatore della seconda acquista quel fattore che non ha, e che trovasi in quello della prima; perciò le due frazioni riduconsi al medesimo denominatore.

Non è difficile accorgersi che queste ed altre consimili semplificazioni, le quali possono estendersi anche ad un maggior numero di frazioni, si presentano da sè ne' casi particolari a chiunque abbia un poco di esercizio.

Estrarre l'intero da una data frazione spuria.

120. *Dovendosi estrarre l'intero da una data frazione spuria, si divida il numeratore pel denominatore; il quoziente che si ottiene sarà l'intero cercato.*

Bisogna intanto avvertire che se la divisione riesce esatta, allora la proposta frazione spuria sarà esattamente uguale ad un numero intero, il quale è il quoziente ottenuto; ma se vi è un resto, essa allora sarà uguale alla parte intera del quoziente più la parte fratta, la quale ha per numeratore il resto, e per denominatore quello stesso della data frazione.

Sia, per esempio, la frazione spuria $\frac{134}{21}$. Dividendo il numeratore pel denominatore, si avrà per quoziente 6, e per resto 8; quindi la proposta frazione sarà uguale a $6 + \frac{8}{21}$.

Applicando la regola data alla frazione spuria $\frac{35}{7}$, si trova per quoziente 5 senza resto; quindi la proposta frazione spuria pareggia esattamente l'intero 5.

Dim. La dimostrazione della data regola è manifesta, poichè sappiamo, che ogni frazione equivale al quoziente il quale si ottiene dividendo il numeratore pel denominatore; ma questa divisione nel primo esempio ha dato per quoziente l'intero 6 unito alla frazione $\frac{8}{21}$; quindi la frazione

spuria $\frac{134}{21}$ è uguale all'intero 6 più la frazione vera $\frac{8}{21}$.

Nel secondo esempio avendo dato per quoziente l'intero 5 senza resto, la frazione spuria $\frac{35}{7}$ sarà perciò esattamente uguale all'intero 5.

121. Se viceversa volessimo ridurre un intero ed una frazione ad un sol numero frazionario, che abbia per denominatore quello della data frazione, *bisogna moltiplicare l'intero pel denominatore della frazione, aggiungere al prodotto il numeratore, e scrivere sotto la somma per denominatore quello della medesima frazione.*

Così, per esempio, l'intero 6 e la frazione $\frac{8}{21}$ volendosi ridurre ad un sol numero frazionario, moltiplicheremo 6 per 21, ed al prodotto 126 aggiungeremo il numeratore 8, otterremo così la frazione $\frac{134}{21}$, che sarà uguale a $6 + \frac{8}{21}$.

Dim. Difatti, la cercata frazione spuria dovendo essere uguale all'intero 6 accompagnato dalla frazione $\frac{8}{21}$; ne segue che estraendone l'intero, cioè dividendo il suo numeratore pel denominatore 21, deve ottenersi per quoziente 6 e per resto 8, quindi il detto numeratore sarà uguale $6 \times 21 + 8$, n.º (74); e però la frazione $\frac{6 \times 21 + 8}{21}$, ossia $\frac{134}{21}$, sarà quella che si cercava.

122. Similmente, se volessimo ridurre (*) un intero a frazione spuria che abbia un dato denominatore, *bisogna moltiplicare l'intero pel dato denominatore, e scrivere sotto al prodotto per denominatore lo stesso denominatore dato.*

Così, per esempio, volendosi ridurre l'intero 5 a numero frazionario che abbia per denominatore 7; si moltiplicherà 5 per 7, e sotto il prodotto 35 si scriverà per denominatore lo stesso 7; quindi ne emergerà la frazione $\frac{35}{7}$ uguale all'intero 5.

Dim. In effetti, il cercato numero frazionario dovendo essere uguale all'intero 5; ne segue che estraendone l'intero, cioè dividendo il suo numeratore pel denominatore 7, deve ottenersi per quoziente 5 senza resto, dunque il detto numeratore sarà uguale a 7×5 ; e quindi il numero frazionario $\frac{7 \times 5}{7}$, ossia $\frac{35}{7}$, sarà quello che si cercava.

123. Avendo qui fatto parola del modo come ridurre un numero intero a frazionario avente per denominatore un numero qualunque, cade anche opportuno osservare che

(*) Questa operazione suole anche enunciarsi ne' seguenti modi.

Valutare, convertire, o trasformare un intero in parti dell'unità che abbiano una data denominazione.

Ogni numero intero può scriversi sotto forma frazionaria che abbia per numeratore l'intero, e per denominatore l'unità.

Così, per esempio, 12 può scriversi sotto la forma $\frac{12}{1}$.

Difatti, l'espressione $\frac{12}{1}$ vuol dire che l'unità si è divisa per 1, ossia, pel denominatore, ed il quoziente 1 che si ottiene si prende 12 volte, cioè quante volte lo dinota il numeratore. Inoltre la stessa espressione equivale al quoziente che si ottiene dividendo il numeratore 12 pel denominatore 1.

Convertire, quando è possibile, una frazione in un'altra che abbia un dato denominatore.

124. *Per convertire una frazione in un'altra che abbia un dato denominatore bisogna moltiplicare il numeratore della frazione data pel nuovo denominatore, e dividere il prodotto pel denominatore della data frazione; se la divisione riesce esatta, il quoziente che si ottiene sarà il cercato numeratore della nuova frazione uguale alla proposta.*

Sia, per esempio, la frazione $\frac{2}{3}$ la quale voglia ridursi ad un'altra avente per denominatore 15. Moltiplicando il suo numeratore 2 pel dato denominatore 15, si avrà per prodotto 30, e dividendo questo prodotto pel denominatore 3, si avrà per quoziente esatto 10, e scrivendo sotto a 10 il nuovo denominatore 15, si avrà la frazione $\frac{10}{15}$; laonde la frazione $\frac{10}{15}$ sarà uguale alla proposta $\frac{2}{3}$.

Dim. La frazione $\frac{2}{3}$ essendo uguale al quoziente della divisione di 2 per 3, se riduciamo il numeratore 2 in 15.^{mi}, il che sappiamo che si fa moltiplicando 2 per 15, n.^o(122),

allora , invece di dividere 2 per 3 , potremo dividere il numero di 15.^{mi} che ne risulta per 3 , laonde il quoziente 10 dovrà esprimere 15.^{mi} ; ma questo quoziente pareggia la frazione proposta , perciò essa sarà uguale a $\frac{10}{15}$.

125. Quando accade che il prodotto del numeratore della frazione proposta pel nuovo denominatore , non è divisibile esattamente pel denominatore della medesima ; allora la frazione proposta non può ridursi esattamente a quella di dato denominatore ; ma ne differisce per una *quantità minore di una parte dell' unità indica dal dato denominatore*.

Così , per esempio , avviene nella frazione $\frac{2}{3}$ quando si vuol convertire in 16.^{mi}. Difatti , il prodotto del numeratore 2 per 16 essendo 32 , questo prodotto che dinota 16.^{mi} , diviso per 3 , dà per quoziente 10 sedicesimi ; ma vi rimangono 2 sedicesimi da dividersi per 3 , che fanno $\frac{2}{3}$ di $\frac{1}{16}$: quindi la frazione proposta $\frac{2}{3}$ non può convertirsi esattamente in

16.^{mi} ; ma si ha $\frac{2}{3} = \frac{10}{16} + \frac{2}{3}$ di $\frac{1}{16}$.

Se poi volesse trascurarsi la parte $\frac{2}{3}$ di $\frac{1}{16}$, allora si avrà *prossimamente* $\frac{2}{3} = \frac{10}{16}$, differendosi dal vero per $\frac{2}{3}$ di $\frac{1}{16}$; cioè per una *quantità minore di $\frac{1}{16}$ dell' unità*.

126. *Corollario*. Da quanto si è detto si desume che le condizioni affinchè una frazione possa ridursi esattamente ad un'altra di dato denominatore sono , o che il dato denominatore sia multiplo di quello della frazione , o che tutti i fattori del denominatore della frazione sieno compresi tra i fattori del suo numeratore e del denominatore dato.

In effetti, allora il prodotto del numeratore della frazione pel denominatore dato, contenendo tutti i fattori del denominatore della frazione, questo denominatore diviene fattore di un tal prodotto, e quindi la divisione riesce esatta.

Così, per esempio, la frazione $\frac{7}{16}$ è riducibile esattamente in un'altra che ha per denominatore 48; perchè 16 essendo fattore di 48, sarà anche fattore di 7×48 .

Similmente la frazione $\frac{6}{15}$ è riducibile esattamente in una altra che ha per denominatore 35; perchè i fattori di 15 che sono 3 e 5, sono compresi fra i fattori del numeratore 6 e del dato denominatore 35; laonde il prodotto 6×35 avendo per fattori tutti quelli di 15, sarà divisibile esattamente per 15.

ART. IV.

Addizione delle frazioni.

127. *Allorchè debbono addizionarsi più frazioni; se le medesime hanno lo stesso denominatore, si addizionano i loro numeratori, e sotto la somma si scrive per denominatore il loro denominatore comune. Se poi hanno denominatori differenti, si ridurranno prima al medesimo denominatore, e poi se ne fa l'addizione.*

Sieno, per esempio, da addizionarsi le frazioni $\frac{3}{11}$, $\frac{5}{11}$, $\frac{2}{11}$, le quali hanno lo stesso denominatore. Addizionando i loro numeratori, si avrà per somma 10, e scrivendo sotto a 10 per denominatore 11, si avrà la frazione $\frac{10}{11}$; laonde $\frac{10}{11}$ sarà la somma delle frazioni proposte.

Sieno poi da addizionarsi più frazioni che hanno denomi-
natori differenti, come sono per esempio le frazioni $\frac{3}{5}$, $\frac{5}{7}$, $\frac{2}{8}$.

Riducendole prima al medesimo denominatore con la re-
gola conosciuta, n.º (116), esse diverranno rispettivamente
uguali alle tre seguenti

$$\frac{168}{280}, \quad \frac{200}{280}, \quad \frac{70}{280},$$

le quali addizionandosi come quelle che hanno lo stesso de-
nominatore, la somma sarà $\frac{438}{280} = 1 \frac{158}{280}$, n.º (120).

Dim. Ragionando sul primo esempio: È manifesto che
dovendosi addizionare le frazioni $\frac{3}{11}$, $\frac{5}{11}$, $\frac{2}{11}$, la loro som-

ma deve contenere tanti undicesimi quanti ne contengono
le frazioni date, cioè deve contenerne $3+5+2$, ossia 10;
quindi la frazione $\frac{10}{11}$, che contiene tanti undicesimi quan-

ti ne contengono tutte le frazioni date, sarà la loro somma.
Similmente si ragiona sul secondo esempio, e su di ogni altro.

128. Allorchè le frazioni da addizionarsi sono accompa-
gnate da numeri interi, si addizioneranno separatamente gli
interi e le frazioni; e se la somma delle frazioni risultasse
spuria, se n'estrarrà l'intero per unirlo alla somma degli'in-
teri: quindi si avrà che

$$13 \frac{5}{6} + 9 \frac{3}{4} = 22 \frac{38}{24} = 23 \frac{14}{24}.$$

129. Se tra le frazioni date ad addizionare si trovassero
alcune del medesimo denominatore, ovvero tali da potersi ri-
durre brevemente ad un comun denominatore più semplice
di quello che si ottiene col metodo generale; allora riesce u-
tile far prima la somma di queste frazioni, e poi questa som-
ma si addizionerà con le rimanenti.

Così, per esempio, dovendosi effettuare la seguente addizione

$$\frac{2}{3} + \frac{5}{9} + \frac{7}{8} + \frac{4}{5} + \frac{3}{8} :$$

osservando che le due prime frazioni possono tosto ridursi al medesimo denominatore moltiplicando i due termini della frazione $\frac{2}{3}$ per 3, fatta una tal riduzione, e poi sommate,

si avrà per somma $\frac{11}{9}$; ed osservando inoltre che le due frazioni $\frac{7}{8}$ e $\frac{3}{8}$, hanno già lo stesso denominatore, la somma di

queste due frazioni sarà $\frac{10}{8}$. Dunque l'addizione delle frazioni date si riduce a quella delle tre seguenti $\frac{11}{9}$, $\frac{10}{8}$, e $\frac{4}{5}$,

la quale si troverà essere

$$\frac{440 + 450 + 288}{360} = \frac{1278}{360}$$

A R T. V.

Sottrazione delle frazioni.

130 Dovendosi togliere una frazione da un'altra, se le frazioni date hanno il medesimo denominatore, si toglierà il numeratore della minore da quello della maggiore, e sotto al resto si scriverà per denominatore il loro denominatore comune; se poi hanno denominatori differenti, esse prima si riducono al medesimo denominatore, ed indi si farà la sottrazione.

Sia, per esempio, la frazione $\frac{5}{8}$ che debba togliersi dall'altra $\frac{7}{8}$, la quale ha lo stesso denominatore. Togliendo dal

numeratore 7 il numeratore 5, si ha per resto 2, e scrivendo sotto a 2 il denominatore 8, si ha la frazione $\frac{2}{8}$; laonde questa frazione sarà il resto cercato.

Sia poi la frazione $\frac{3}{5}$, che debba sottrarsi dall'altra $\frac{8}{9}$ di diverso denominatore: Riducendo queste due frazioni al medesimo denominatore, si avrà che $\frac{8}{9} - \frac{3}{5} = \frac{40}{45} - \frac{27}{45}$; ed eseguendo la sottrazione come per le frazioni che hanno lo stesso denominatore, si troverà che $\frac{8}{9} - \frac{3}{5} = \frac{13}{45}$.

Dim. Ragionando sul primo esempio: È manifesto che dovendosi togliere dalla frazione $\frac{7}{8}$ la frazione $\frac{5}{8}$ debbono rimanervi tanti ottavi quant'è il resto che si ottiene togliendo 5 da 7; ma 5 tolto da 7 resta 2; dunque la frazione $\frac{2}{8}$ sarà il resto che si cercava. Similmente si ragiona sul secondo esempio, e su qualunque altro.

Avvertimento. Se dopo aver ridotte le frazioni al medesimo denominatore, succede che il numeratore della frazione da sottrarsi sia maggiore di quello dell'altra, allora la prima frazione essendo maggiore di quest'ultima, la sottrazione non può eseguirsi.

131. Allorchè un numero intero ed una frazione deve sottrarsi da un intero ed una frazione, si toglierà prima la frazione dalla frazione, e poi l'intero dall'intero.

Così, per esempio, se dovesse togliersi $8\frac{3}{7}$ da $12\frac{7}{8}$; si avrà

$$12\frac{7}{8} - 8\frac{3}{7} = 12\frac{49}{56} - 8\frac{24}{56} = 4\frac{25}{56}.$$

Ma se la frazione da sottrarsi fosse maggiore di quella che

soffice la sottrazione, questa si farà imprestare una unità dall'intero che l'accompagna, e poi si farà la sottrazione.

Così, per esempio, se dovesse togliersi $8\frac{7}{8}$ da $12\frac{3}{7}$, si avrà

$$12\frac{3}{7} - 8\frac{7}{8} = 12\frac{24}{56} - 8\frac{49}{56} = 11\frac{56}{56} + \frac{24}{56} - 8\frac{49}{56} = 3\frac{31}{56}.$$

132. Se una frazione vera dovesse sottrarsi da un intero, come, per esempio, se dovesse togliersi la frazione $\frac{4}{7}$ dall'in-

tero 9; allora converrà ridurre una unità dell'intero a numero frazionario avente per denominatore quello della frazione data, e poi dal numero frazionario uguale all'unità se ne toglierà la frazione data; il che equivale a sottrarre il numeratore della data frazione dal suo denominatore, ed a scrivere sotto al resto per denominatore lo stesso denominatore: quindi si avrà che

$$9 - \frac{4}{7} = 8 + \frac{7}{7} - \frac{4}{7} = 8\frac{3}{7} (*).$$

A R T. VI.

Moltiplicazione delle frazioni.

133. Essendosi veduto ne' numeri (108, 109) in che maniera una frazione si moltiplichi per un numero intero; in questo articolo parleremo soltanto del modo come far la moltiplicazione quando il moltiplicatore è un numero fratto;

(*) Non avremmo dovuto discendere a queste particolarità; ma l'abbiamo fatto, affinchè il maestro si ricordi di farle osservare a' giovanetti, essendoci alcune volte occorso di vederli imbarazzati in eseguire queste semplicissime operazioni.

ma conviene innanzi tutto precisare che cosa significhi il moltiplicare un numero qualunque per una frazione; per il che siamo obbligati a dare una definizione più generale di quella del n.º (43) che si riferiva a' soli numeri interi. diremo dunque che *la moltiplicazione è quell'operazione in cui, essendo dati due numeri, si vuol prendere di uno quella quantità, che viene indicata dall'altro*. E però chiamandosi il primo numero *moltiplicando* ed il secondo *moltiplicatore*, il moltiplicatore è quel numero che esprime se il moltiplicando si deve prendere una o più volte, ovvero esprime che non solo deve prendersi una o più volte, ma se ne deve prendere dippiù una certa parte, ovvero infine esprime che deve prendersene solamente una certa parte.

Questi tre differenti modi di prendere quella quantità che conviene del moltiplicando avvengono secondo che il moltiplicatore è intero, o frazione spuria, o frazione vera. Così, per esempio, volendosi moltiplicare un dato numero per 8, vuol dire che deve prendersi 8 volte; e volendosi moltiplicare per $8\frac{4}{5}$, vuol dire che deve prendersi 8 volte e se ne debbono prendere dippiù $\frac{4}{5}$; ed infine volendosi moltiplicare per $\frac{4}{5}$, significa che si vogliono prendere i soli $\frac{4}{5}$ del moltiplicando.

Risulta da ciò che nella moltiplicazione il prodotto viene a formarsi per mezzo del moltiplicando della stessa guisa che il moltiplicatore viene a formarsi rispetto all'unità. Così nella moltiplicazione di 5 per 4, il prodotto 20 si forma da 5 preso 4 volte, come il moltiplicatore 4 si forma dall'unità presa 4 volte.

Moltiplicazione di una frazione per un'altra.

134. *Una frazione si moltiplica per un'altra, moltiplicando i numeratori fra loro, e i denominatori fra loro.*

Sia, per esempio, da moltiplicarsi la frazione $\frac{4}{7}$ per l'altra $\frac{3}{5}$. Moltiplicando i numeratori fra loro, e i denominatori fra loro, ne verrà la frazione $\frac{12}{35}$; laonde questa frazione sarà il prodotto cercato.

Dim. Difatti, dovendosi moltiplicare la frazione $\frac{4}{7}$ per l'altra $\frac{3}{5}$, ciò significa che bisogna prendere i $\frac{3}{5}$ di $\frac{4}{7}$, cioè bisogna prendere la quinta parte di $\frac{4}{7}$, e ripeterla 3 volte; dunque conviene prima dividere la frazione $\frac{4}{7}$ per 5, e poi moltiplicare il quoziente per 3. Ma sappiamo, n.º (109), che una frazione si divide per 5 moltiplicando il suo denominatore per 5; perciò si avrà che $\frac{4}{7 \times 5}$ sarà la quinta parte di $\frac{4}{7}$. Or questa quinta parte dovendo moltiplicarsi per 3, sappiamo, n.º (108), che ciò si fa moltiplicando il suo numeratore per 3; perciò, indicando l'operazione, il prodotto cercato sarà $\frac{4 \times 3}{7 \times 5}$; il quale ci fa vedere che per moltiplicarsi una frazione per un'altra, bisogna moltiplicare i numeratori fra loro, ed i denominatori fra loro.

Moltiplicazione di un numero intero per una frazione.

135. *Un intero si moltiplica per una frazione moltiplicando l'intero pel numeratore della frazione; senza alterare il denominatore.*

Sia, per esempio, l'intero 7 da moltiplicarsi per la fra-

zione $\frac{5}{9}$. Moltiplicando l'intero 7 pel numeratore 5, senza alterare il denominatore, si avrà la frazione $\frac{35}{9}$; quindi questa frazione sarà il prodotto cercato.

Dim. Scrivendo l'intero 7 sotto forma di frazione che abbia per denominatore l'unità, n.º (123); l'operazione si riduce a dover moltiplicare la frazione $\frac{7}{1}$ per l'altra $\frac{5}{9}$; perciò il prodotto sarà $\frac{7 \times 5}{1 \times 9}$, ossia $\frac{7 \times 5}{9}$; quindi esso si ottiene moltiplicando l'intero pel numeratore della frazione, senza alterare il denominatore.

La medesima regola potrebbe dimostrarsi in un modo interamente simile a quello tenuto per la moltiplicazione di una frazione per un'altra.

136. Se un intero accompagnato da una frazione dovesse moltiplicarsi per un intero anche accompagnato da una frazione, si ridurrà ciascun intero con la frazione che l'accompagna ad un sol numero frazionario, e poi si moltiplicheranno fra loro i numeri frazionarii che ne risultano.

Così, per esempio, dovendosi moltiplicare $8\frac{3}{4}$ per $5\frac{2}{7}$: riducendo $8\frac{3}{4}$ ad un sol numero frazionario, ne verrà $\frac{35}{4}$, e riducendo similmente $5\frac{2}{7}$, ne verrà $\frac{37}{7}$: laonde l'operazione si riduce a dover moltiplicare la frazione $\frac{35}{4}$ per l'altra $\frac{37}{7}$, il che effettuandosi, si ottiene per prodotto

$$\frac{1295}{28} = 46\frac{7}{28} = 46\frac{1}{4}.$$

137. Se poi uno de' fattori fosse un intero accompagnato da una frazione, e l'altro fosse soltanto intero; allora riesce meglio far la moltiplicazione *per parti*.

Così , per esempio , dovendo moltiplicarsi $7\frac{3}{5}$ per 8 , si moltiplicherà prima la parte 7 del moltiplicando per 8 , e si avrà per prodotto 56 ; poi si moltiplicherà l'altra parte $\frac{3}{5}$ per 8 , e si avrà prodotto $\frac{24}{5} = 4\frac{4}{5}$; indi si farà la somma di questi prodotti parziali , e si otterrà il prodotto totale che sarà $56 + 4\frac{4}{5} = 60\frac{4}{5}$.

138. *Avvertimento.* Giova osservare che nella moltiplicazione di un numero qualunque per una frazione , se il moltiplicatore è una frazione vera , come per esempio , se esso fosse $\frac{3}{7}$, il prodotto sarà *minore* del moltiplicando ; perchè è uguale a' $\frac{3}{7}$ del moltiplicando. Se poi il moltiplicatore fosse una frazione spuria , come per esempio $\frac{9}{7}$, il prodotto sarà *maggiore* del moltiplicando , perchè esso essendo $i\frac{9}{7}$ del moltiplicando , sarà uguale al moltiplicando più altri $\frac{2}{7}$ del medesimo.

ART. VII.

Divisione delle frazioni.

139. Essendosi veduto ne' numeri (108 , 109) come una frazione possa dividersi per un numero intero ; in questo articolo tratteremo solamente del modo come far la divisione quando il divisore è un numero fratto.

Convieni intanto ricordare che la divisione di un numero qualunque per una frazione , conserva lo stesso significato che le fu dato nel n.º (61) riguardo agl' interi ; vale a dire ,

essa è un'operazione ove essendo dato un prodotto ed un suo fattore, si va in cerca dell'altro fattore.

Giova non pertanto avvertire che qui il quoziente non rappresenta una delle parti uguali in cui si divide il dividendo, come avviene quando il divisore è un numero intero.

Divisione di una frazione per un'altra.

140. Una frazione si divide per un'altra moltiplicando quella che fa da dividendo per quella che fa da divisore rovesciata.

Sia, per esempio, la frazione $\frac{3}{5}$ che debba dividersi per l'altra $\frac{4}{7}$. Moltiplicando la prima per la seconda rovesciata, nè risulterà la frazione $\frac{21}{20}$; laonde questa frazione sarà il quoziente cercato.

Dim. Poichè il quoziente ignoto moltiplicato per $\frac{4}{7}$ deve dare per prodotto $\frac{3}{5}$, il dividendo $\frac{3}{5}$ sarà $\frac{4}{7}$ del quoziente ignoto; perciò, se divideremo $\frac{3}{5}$ per $\frac{4}{7}$, otterremo $\frac{1}{7}$ del quoziente ignoto; e se dopo moltiplicheremo questo settimo per 7 avremo così tutto il quoziente che si cerca. Ma $\frac{3}{5} : \frac{4}{7} = \frac{3}{5 \times \frac{4}{7}} = \frac{3}{5 \times \frac{4}{7}} \times 7 = \frac{3 \times 7}{5 \times 4}$. Dunque il quoziente ignoto sarà $\frac{3 \times 7}{5 \times 4}$; cioè si ottiene moltiplicando il dividendo pel divisore rovesciato (*).

(*) Suole anche darsi ragione della data regola, facendo vedere come prova, che il risultato $\frac{3 \times 7}{5 \times 4}$ a cui si giunge, moltiplicato

Divisione di un numero intero per una frazione.

141. *Un intero si divide per una frazione moltiplicando l'intero per la frazione rovesciata.*

Sia , per esempio, l'intero 8 da dividersi per frazione $\frac{6}{11}$.

Montiplicando l'intero 8 per la frazione $\frac{6}{11}$ rovesciata , ne risulterà la frazione $\frac{88}{6}$; laonde questa frazione sarà il quoziente cercato.

Dim. Poichè , scrivendo l'intero 8 sotto forma di frazione che abbia per denominatore l'unità , l'operazione si riduce a dover dividere la frazione $\frac{8}{1}$ per l'altra $\frac{6}{11}$; perciò il

quoziente sarà $\frac{8 \times 11}{1 \times 6}$, ossia $\frac{8 \times 11}{6}$; quindi esso si ottiene moltiplicando l'intero per la frazione rovesciata.

pel divisore $\frac{4}{7}$ dà per prodotto il dividendo. Ma questa dimostrazione ha il difetto osservato nella nota al n.º (73).

La medesima regola suole anche dimostrarsi nel seguente modo.

Considerando che il divisore $\frac{4}{7}$ dinota la settima parte di 4; se invece di dividere $\frac{3}{5}$ per $\frac{4}{7}$, si divide per 4 , cioè per un numero 7 volte maggiore , il quoziente sarà 7 volte minore del vero; laonde, per avere il vero quoziente , quello che si ottiene dovrà moltiplicarsi per 7 ; e perciò esso sarà $\frac{3 \times 7}{5 \times 4}$.

Ma questa dimostrazione poggiandosi sulla considerazione che se il divisore si rende un certo numero di volte maggiore, il quoziente , al contrario , si renderà altrettante volte minore ; poggia su di un principio, che sino al punto dell'Aritmetica in cui siamo giunti , non ancora abbiamo generalmente dimostrato.

Potrebbe anche farsi uso della medesima dimostrazione che si è fatta pel caso precedente.

142. Se un intero accompagnato da una frazione dovesse dividersi per un intero anche accompagnato da una frazione; si ridurrà ciascun intero con la frazione che l'accompagna ad un sol numero frazionario, e poi si farà la divisione.

Così, per esempio, dovendosi dividere $5\frac{3}{8}$ per $9\frac{2}{3}$. Riducendo $5\frac{3}{8}$ ad un sol numero frazionario, ne verrà la frazione $\frac{43}{8}$; e riducendo similmente $9\frac{2}{3}$, si avrà la frazione $\frac{29}{3}$. Dunque l'operazione si è condotta a dividere la frazione $\frac{43}{8}$ per l'altra $\frac{29}{3}$; perciò il quoziente sarà $\frac{43 \times 3}{8 \times 29} = \frac{129}{232}$.

143. *Avvertimento.* Nella divisione di un numero qualunque per una frazione vera, il quoziente risulterà maggiore del dividendo; poichè il dividendo essendo uguale al prodotto del quoziente pel divisore, questo prodotto è minore del moltiplicando, allorchè il moltiplicatore è una frazione vera.

A R T. VIII.

Delle frazioni di frazioni.

144. Siccome dividendo l'unità in parti uguali, e prendendo un certo numero di queste parti, si ha una frazione dell'unità; così pure, se una frazione si divide in parti uguali, e poi si prende un certo numero di queste parti, si avrà una *frazione di frazione*.

Volendosi, per esempio, prendere $\frac{5}{9}$ di $\frac{3}{8}$; il risultato sarà una *frazione di frazione*; e poichè sappiamo, n.º (133),

che per prendere i $\frac{5}{9}$ di $\frac{3}{8}$ bisogna moltiplicare $\frac{3}{8}$ per $\frac{5}{9}$, il che effettuandosi, si ottiene la frazione $\frac{15}{72}$; ne segue che.

Una frazione di frazione si riduce ad una sola frazione, moltiplicando fra loro le due frazioni date.

Se poi della frazione $\frac{15}{72}$, la quale è i $\frac{5}{9}$ di $\frac{3}{8}$, si volesse di nuovo prendere una frazione, come, per esempio, i $\frac{2}{3}$, il risultato sarà i $\frac{2}{3}$ di $\frac{5}{9}$ di $\frac{3}{8}$; cioè sarà una *frazione di frazione di frazione*. Questo risultato, come è chiaro, si ottiene moltiplicando la frazione $\frac{15}{72}$ per $\frac{2}{3}$, il che equivale a formare il prodotto delle tre frazioni $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{9}$, e $\frac{2}{3}$, il quale sarà $\frac{30}{216}$.

145. Giova intanto avvertire che quante volte occorre moltiplicare fra loro più frazioni, è utile lasciar indicate le operazioni da farsi; poichè spesso accade che veggonsi a colpo d'occhio i fattori comuni al numeratore ed al denominatore del prodotto cercato, i quali supprimendosi, si perviene brevemente ad un risultato più semplice.

Così nell'esempio precedente, dove bisognava formare il prodotto delle frazioni $\frac{3}{8}$, $\frac{5}{9}$, e $\frac{2}{3}$, indicando le moltiplicazioni, si avrà per prodotto $\frac{3 \times 5 \times 2}{8 \times 9 \times 3}$; ed osservando che $8 = 4 \times 2$, supprimendo i fattori 3 e 2 comuni al numeratore ed al denominatore, si avrà per risultato $\frac{5}{36}$, il quale è più semplice dell'altro $\frac{30}{216}$ che abbiamo ottenuto di sopra.

Osservazioni sulla moltiplicazione e divisione delle frazioni.

146. Le stesse verità di cui fu parola ne' numeri (57, 58) rispetto agl' interi, possiamo ora estenderle anche a' numeri frazionarii ; e quindi ne concluderemo in generale che:

Se un numero si moltiplica pel prodotto di altri numeri, si ottiene lo stesso risultato il quale si otterrebbe moltiplicandolo successivamente per ciascuno di questi numeri.

E che : *Il prodotto di più fattori non cambia, comunque si permuti l' ordine di moltiplicazione dei suoi fattori.*

Dim. Difatti , se tra i fattori dati si trovasse alcuno che abbia bisogno di esser ridotto ad un sol numero frazionario, riducendolo a tal forma , e scrivendo anche i fattori interi sotto forma frazionaria avente per denominatore l'unità, allora tutti i fattori dati si convertiranno in numeri frazionarii; laonde l'operazione si riduce a dover formare il prodotto dei loro numeratori, e quello de' loro denominatori, i quali essendo prodotti di numeri interi, valgono rispetto ad essi le enunciate verità.

147. *Se in una moltiplicazione di due o più numeri qualsivogliano , uno de' fattori si moltiplica o divide per un altro numero qualunque , si otterrà un prodotto uguale al prodotto di prima moltiplicato o diviso per quest' ultimo numero.*

Dim. Imperocchè, se tra i numeri dati si trovasse alcuno il quale abbia bisogno di esser ridotto ad un sol numero frazionario, riducendolo a tal forma, e scrivendo anche i numeri interi sotto forma frazionaria avente per denominatore l'unità, tutti i numeri dati si convertiranno in numeri frazionarii. Supponiamo dunque che i detti numeri riducansi alle

frazioni $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{9}$, $\frac{7}{2}$; e sia $\frac{5}{9}$ quel fattore che si moltiplichi per un numero qualunque, per esempio per $\frac{3}{8}$. Ciò posto, concependo formato il prodotto di $\frac{5}{9}$ per $\frac{3}{8}$, il che indichiamo col chiudere in parentesi questi fattori, si avrà che il nuovo prodotto sarà $\frac{3}{4} \left(\frac{5}{9} \times \frac{3}{8} \right) \frac{7}{2}$; ma questo prodotto equivale a $\frac{3}{4} \times \frac{5}{9} \times \frac{3}{8} \times \frac{7}{2}$, n.º (146), e passando il fattore $\frac{3}{8}$ all'ultimo posto, viene uguale a $\frac{3}{4} \times \frac{5}{9} \times \frac{7}{2} \times \frac{3}{8}$; cioè sarà uguale al prodotto primitivo moltiplicato per $\frac{3}{8}$.

Se poi il fattore $\frac{5}{9}$ si dividesse per $\frac{3}{8}$, la dimostrazione procederebbe similmente, con la sola differenza che il numero $\frac{3}{8}$ prende una posizione rovescia; e però il nuovo prodotto a cui si giunge essendo $\frac{3}{4} \times \frac{5}{9} \times \frac{7}{2} \times \frac{8}{3}$, sarà uguale al primitivo diviso pel numero $\frac{3}{8}$.

148. *COROLLARIO.* Dunque, se un dato prodotto di più fattori voglia moltiplicarsi per un numero qualunque; basta moltiplicare uno de' suoi fattori per questo numero, rimanendo inalterati tutti gli altri fattori.

Da qui si deduce che, se in una divisione il dividendo ed il divisore si moltiplicano pel medesimo numero, il quoziente non si altera.

C A P. V.

De' numeri decimali

A R T. I.

149. Si chiama *numero decimale* ovvero *frazione decimale* quel numero o frazione che dinota parti decime, centesime, millesime, ec. dell'unità. Dunque :

I denominatori delle frazioni decimali sono i numeri 10, 100, 1000, ec., cioè quei numeri le cui cifre sono l'unità seguita da zeri.

Maniera di scrivere i numeri decimali

150. Se il numero decimale contiene una parte intera, si scrive prima la parte intera, e se non la contiene, in sua vece si scrive un zero; poi a dritta della parte intera o dello zero, si mette una virgola, ed in seguito si scrive il solo numeratore della parte decimale, se esso contiene tante cifre quanti sono i zeri del denominatore: ma se ne contenesse meno, si farà precedere da tanti zeri quanti ne occorrono per completare un numero di cifre uguale al numero de' zeri del denominatore.

E però dalle cifre poste a dritta della virgola si conoscerà tosto qual sia il denominatore, senza bisogno di scriverlo, poichè il medesimo deve contenere tanti zeri, quante sono le cifre a dritta della virgola.

Così, per esempio, le frazioni decimali $\frac{57}{100}$ e $\frac{23}{10000}$, scritte senza denominatore, si trasformano in 0,57 ed in

0,0023 ; e si leggeranno rispettivamente zero interi e 57 centesimi, e zero interi e 23 diecimillesimi.

Come pure, avendosi i numeri $34\frac{7}{10}$ ed $89\frac{65}{1000}$, se vogliansi scrivere senza denominatore le frazioni decimali che accompagnano gl' interi, i proposti numeri divengono 34,7 ed 89,065 ; e si leggeranno 34 interi e 7 decimi, ed 89 interi e 65 millesimi.

ART. II.

Proprietà de' numeri decimali

151. *Le parti decimali dell' unità, cioè i decimi, i centesimi, i millesimi, cc. sono rispettivamente decuple l' una dell' altra.*

Difatti $\frac{1}{10}$ diviso per 10 dà $\frac{1}{100}$; $\frac{1}{100}$ diviso per 10 dà $\frac{1}{1000}$; $\frac{1}{1000}$ diviso per 10 dà $\frac{1}{10000}$; e così di seguito.

152. *In ogni numero decimale la cifra al primo posto a dritta della virgola dinota decimi, quella al secondo posto dinota centesimi, quella al terzo posto dinota millesimi, e così di seguito.*

Sia, per esempio, il numero decimale 83,7204, ove la parte decimale, secondo la definizione, dinota 7204 diecimillesimi: dico che essa equivale a 7 decimi più 2 centesimi più zero millesimi più 4 diecimillesimi.

Din. Poichè scomponendo il numeratore della frazione $\frac{7204}{10000}$ nelle unità de' suoi diversi ordini, esso diviene uguale a 7000 + 200 + 4; quindi la detta frazione sarà ugua-

le a $\frac{7000}{10000} + \frac{200}{10000} + \frac{4}{10000}$; ma poichè in queste frazioni si sopprimono tre zeri da' due termini della prima, e due zeri da' due termini della seconda, esse riduconsi alle altre $\frac{7}{10} + \frac{2}{100} + \frac{4}{10000}$. Ciò che bisognava dimostrare.

153. Da ciò che abbiám detto ne' due numeri precedenti si desume che ogni numero decimale si divide in diversi ordini di unità, i quali, procedendo da sinistra verso dritta, sono di 10 in 10 volte minori.

Questa legge, la quale non è interrotta dalla virgola, rende vantaggiosissimo l'uso delle frazioni decimali, mentre per essa il calcolo su questa specie di frazioni si esegue della stessa guisa che su i numeri interi, come vedremo fra breve.

154. Da una frazione spuria decimale si estrae l'intero distaccando con la virgola tante cifre dalla dritta del suo numeratore quanti zeri contiene il denominatore; ed allora le cifre a sinistra della virgola esprimeranno la parte intera, e quelle a dritta la parte decimale.

Sia, per esempio, la frazione spuria decimale $\frac{27853}{1000}$.

Distaccando tre cifre dalla dritta del suo numeratore, ne viene il numero decimale 27,853. Ora io dico che questo numero è uguale alla frazione spuria proposta.

Dim. In effetti, togliendo dal numeratore il numero rappresentato dalle sue tre cifre a dritta, esso si decompone nei due numeri 27000 ed 853; quindi la proposta frazione spuria equivale a $\frac{27000}{1000} + \frac{853}{1000}$; ma la prima di queste due

frazioni si riduce al numero intero 27, poichè i suoi due termini sono divisibili per 1000; perciò la proposta frazione spuria viene uguale a 27,853.

Da qui segue viceversa che $27,853 = \frac{27853}{1000}$; cioè, in

ogni numero decimale la parte intera e la parte decimale possono enunciarsi congiuntamente come se formassero un numero solo, il quale dinoterà unità dell' infimo ordine decimale del numero proposto.

155. *Un numero intero senza cambiar valore rappresenta parti decime, centesime, millesime, ec. dell' unità, aggiungendo rispettivamente uno, due, tre, ec. zeri alla sua dritta.*

Sia, per esempio, il numero intero 85 alla cui dritta si aggiungano due zeri, esso rappresenterà 8500 centesimi.

Dim. Difatti scrivendo il numero 85 sotto forma di frazione ordinaria che abbia per denominatore l'unità, si avrà $85 = \frac{85}{1}$; e moltiplicando i due termini di questa frazione per 100, ne verrà $\frac{85}{1} = \frac{8500}{100}$.

Ciò potrebbe anche desumersi dalla riduzione di un intero a numero frazionario di dato denominatore.

Bisogna intanto avvertire che quando un numero intero si converte in parti decimali dell' unità, per esprimere ciò, si mette una virgola a dritta dell' intero. Così il numero 85 convertito in centesimi si scriverà 85,00, e si leggerà 8500 centesimi.

156. *Un numero decimale non cambia valore, aggiungendo alla sua dritta o togliendo da essa, quanti zeri si vogliono.*

Sia, per esempio; il numero decimale 83,07 alla cui dritta aggiungansi tre zeri, esso allora diviene 83,07000; il quale io dico di essere uguale al numero 83,07.

Difatti le parti decimali de' numeri 83,07 ed 83,07000, scritte sotto forma di frazioni ordinarie, sono $\frac{7}{100}$ e $\frac{7000}{100000}$,

cioè sono uguali, perchè la seconda frazione risulta dal moltiplicare i due termini della prima per lo stesso nu-

mero, che è 1000; ma le parti intere de' predetti numeri sono pure uguali, perciò il numero 83,07 è uguale ad 83,07000.

Ciò potrebbe anche dedursi dal n.º (152), poichè in esso abbiamo veduto che il valore delle unità di ciascuna cifra del numero decimale dipende dal posto che la cifra occupa rispetto alla virgola; ma con aggiungere o togliere quanti zeri si vogliono dalla dritta del numero proposto, le sue cifre significative restano le stesse, ed occupano lo stesso posto rispetto alla virgola; perciò il numero decimale non cambia valore.

157. *Un numero decimale si moltiplica o si divide per 10, 100, 1000, ec., secondo che la virgola si trasferisce di uno, due, tre, ec. posti verso dritta, o verso sinistra.*

Sia per esempio il numero 8325,479.

Trasferendo primieramente la virgola di un posto verso dritta, esso diviene 83254,79. Ora io dico che questo numero è 10 volte maggiore del primo.

Difatti, col trasferirsi la virgola di un posto verso dritta, tutte le cifre del numero proposto dinotano unità 10 volte più grandi: così la cifra 9 che dinotava 1000.^{mi} è passata a dinotar 100.^{mi}, che sono unità 10 volte più grandi; e la cifra 7 che dinotava 100.^{mi} è passata a dinotar 10.^{mi} che sono unità 10 volte più grandi; lo stesso può dirsi delle altre cifre; laonde tutte le parti del numero proposto essendo divenute 10 volte maggiori, il tutto che ne risulta sarà pure 10 volte maggiore, cioè il proposto numero si sarà moltiplicato per 10.

Se poi la virgola si trasferisce di due posti verso dritta, si avrà il numero 832547,9, il quale sarà 100 volte maggiore del proposto. Difatti il numero proposto essendosi moltiplicato prima per 10 col trasferirsi la virgola di un sol posto, torna di nuovo a moltiplicarsi per 10 col trasferirsi la virgola di un altro posto; quindi diviene 100 volte maggiore di prima, perchè 10 moltiplicato per 10 fa 100.

Così pure, se la virgola si trasferisce de' tre posti, si avrà il numero 8325479, il quale sarà 1000 volte maggiore del

proposto. Difatti il proposto numero essendosi moltiplicato prima per 100 col trasferirsi la virgola di due posti verso dritta, viene poi a moltiplicarsi per 10 col trasferirsi la virgola di un altro posto; quindi diviene 1000 volte maggiore di prima, perchè 100 moltiplicato per 10 fa 1000.

Un ragionamento inverso farà vedere che se la virgola si trasferisca di uno, due, tre, ec. posti verso sinistra, il proposto numero si dividerà per 10, 100, 1000, ec.

ART. III.

Addizione de' numeri decimali

158. *I numeri decimali si addizionano scrivendo i numeri dati l'uno sotto l'altro, in modo che le cifre decimali della stessa classe sieno situate in una medesima colonna; e poi si esegue l'addizione come si fa per i numeri interi, ricordandosi di scrivere la virgola in quel posto che occupava.*

Sieno, per esempio, da addizionarsi i seguenti numeri decimali 5937,029, 236,5087, 22,09, 0,5876.

Scriveremo questi numeri l'uno sotto l'altro in modo che le unità dello stess' ordine corrispondano in una medesima colonna, come si scorge qui a fianco. Poi si

comincia l'addizione dalla prima colonna a dritta, e si dirà: 8 diecimillesimi più 4 diecimillesimi fanno 13 diecimillesimi; ma poichè 13 diecimillesimi formano 1 millesimo e 3 diecimillesimi, i 3 diecimillesimi si scrivono al di sotto nel posto de' diecimillesimi, ed il millesimo si ritiene per unirlo alla colonna de' millesimi.

Poi si passa ad addizionare i numeri della colonna de' millesimi, e si dirà: 1 millesimo che si porta, più 9 fanno 10, più 8 fanno 18, più 7 fanno 25 millesimi; ma poichè 25

5937,029
236,5087
22,09
0,5876

6196,2153

millesimi fanno 2 centesimi e 5 millesimi, i 5 millesimi si scrivono al di sotto nella colonna de' millesimi, e i 2 centesimi si ritengono per unirli alla colonna de' centesimi. Poi si passa ad addizionare la colonna dei centesimi operando similmente, e similmente si prosegue sino all'addizione dell'ultima colonna. In tal modo si troverà per somma il numero 6196,2153.

159. *AVVERTIMENTO.* Se in un numero decimale si considerano quante cifre si vogliano alla sua dritta, le unità rappresentate da queste cifre non giungono mai a formare una unità dell'ordine superiore immediatamente a sinistra di esse (*).

Sia, per esempio, il numero 0,498999. Dico che il numero rappresentato dalle tre ultime cifre a dritta è minore di 1 millesimo.

Poichè nel caso più sfavorevole in cui le stesse sieno tutte 9, come è il nostro, bisogna aggiungere ad esse una unità dell'infimo ordine, cioè 1 milionesimo per formare 1 millesimo. In effetti addizionando il numero proposto 0,498999 con 0,000001, come si vede qui a fianco, si troverà per somma 0,499000. Dunque le unità rappresentate dalle tre ultime cifre formano meno $\frac{0,000001}{0,499000}$ di 1 millesimo.

(*) Questa verità, che è comune a' decimali ed agl'interi, perchè è comune la legge con cui procedono le unità rappresentate dalle cifre de' loro diversi ordini, avrebbe avuto miglior posto nell'articolo precedente; ma la dimostrazione riesce più semplice in questo luogo.

Sottrazione de' numeri decimali

160. Dovendosi sottrarre un numero decimale da un altro, si scrive il numero minore sotto al maggiore, in modo che le cifre decimali della stessa ordine sieno situate in una medesima colonna; poi si esegue la sottrazione come si fa per gl'interi, ricordandosi di porre la virgola al posto in cui si trovava. Se poi le cifre decimali del numero maggiore fossero meno di quelle del numero minore, si aggiungeranno tanti zeri a dritta del primo finchè le sue cifre decimali sieno quante quelle del secondo.

Sia, per esempio, il numero decimale 975,239 dal quale debba togliersi l'altro decimale 96,482.

Scrivendo il minore sotto al maggiore in modo che le unità dello stesso ordine sieno situate in una medesima colonna, come qui a fianco si vede, si eseguirà

975,239	
96,482	
878,757	

poi la sottrazione della stessa guisa che si fa per i numeri interi; cioè, si cominceranno a togliere i millesimi del numero minore da quelli del maggiore, e si dirà: da 9 millesimi toltone 2 millesimi restano 7 millesimi, che si scrivono al di sotto. Poi si passa a togliere da' 3 centesimi del numero maggiore gli 8 centesimi del minore, e si dirà: da 3 tolto 8 non si può; perciò la cifra 3 si farà imprestare 1 decimo dalla cifra 2 de' decimi, il quale ridotto in centesimi, ed aggiunto a' 3 centesimi, fa 13 centesimi; quindi si dirà: da 13 tolto 8 resta 5, che si scrive al di sotto. Similmente si prosegue innanzi; e si troverà per resto il numero 878,757.

161. Sia per secondo esempio da sottrarsi il numero 37,9832 dal numero 86,25.

Qui il numero minore avendo più cifre decimali del maggiore, aggiungeremo due zeri a dritta del maggiore affin di rendere le sue cifre decimali quante son quelle del minore, e con ciò sappiamo che il numero maggiore non cambia valore, n.º (156). Quindi l'operazione si

86,2500
57,9832
86,2500
28,2668

ridurrà a togliere il numero 57,9832 dall'altro 57,9832 86,2500, la quale effettuandosi, come si vede qui 28,2668 di contro, si ottiene per resto il numero 28,2668;

162. Sia per terzo esempio da toglersi il numero decimale 0,583 dall'intero 24.

Poichè sappiamo, n.º (155), che aggiungendo uno, due, tre, ec. zeri a dritta di un intero, esso, senza cambiar valore, rappresenterà decimi, centesimi, millesimi, ec., in questo caso porremo tre zeri a dritta dell'intero 24, perchè il numero decimale da toglersi rappresenta millesimi, e porremo anche la virgola a dritta di 24 per distinguere che è un intero convertito in millesimi. Laon-

24,000
0,583
24,000
23,417

de l'operazione si riduce a sottrarre il numero 0,583 0,583 dal numero 24,000; il che effettuandosi come si 23,417 vede qui a fianco, si ottiene per resto 23,417.

A R T. V.

Moltiplicazione de' numeri decimali.

163. Due numeri decimali si moltiplicano tra loro come se fossero interi facendo astrazione dalla virgola, e poi si distaccheranno dalla dritta del prodotto tante cifre decimali quante ne contenevano ambedue i fattori.

Sia, per esempio, il numero 27,596 da moltiplicarsi per 3,81.

Eseguendo la moltiplicazione come se fosse
ro interi, secondo si vede qui a fianco, si avrà
per prodotto 10514076; e distaccando cinque
cifre decimali dalla dritta di questo prodotto,
si otterrà il numero 105,14076, il quale sarà
il prodotto cercato.

$$\begin{array}{r} 27596 \\ 381 \\ \hline 27596 \\ 220768 \\ 82788 \\ \hline 105,14076 \end{array}$$

Dim. In effetti, facendosi astrazione dalla virgola nel moltiplicando e nel moltiplicatore, il primo viene a moltiplicarsi per 1000 ed il secondo per 100, n.º (157); ma noi sappiamo, n.º (147), che quando il fattore di un prodotto si moltiplica per qualche numero, il prodotto si troverà moltiplicato pel medesimo numero; perciò il prodotto cercato si troverà moltiplicato per 1000 ed anche per 100, laonde, per avere il prodotto vero, quello che si ottiene dovrà dividersi successivamente per 1000 e per 100, il che si consegue con distaccare dalla sua dritta tante cifre decimali quante ne contengono i suoi fattori.

La medesima cosa potrebbe anche dimostrarsi nel seguente modo.

Scrivendo i numeri proposti sotto forma di frazioni ordinarie, l'operazione si riduce a dover moltiplicare $\frac{27596}{1000}$ per $\frac{381}{100}$; ed indicando la moltiplicazione, il prodotto sarà $\frac{27596 \times 381}{1000 \times 100} = \frac{27596 \times 381}{100000}$. Perciò esso si ottiene moltiplicando i numeri proposti considerati come interi, e dividendo il prodotto per l'unità seguita da tanti zeri quante cifre decimali sono in ambedue i fattori.

164. Se dovesse moltiplicarsi una frazione ordinaria per un numero decimale, come, per esempio, la frazione $\frac{35}{48}$ per 9,21; si scriverebbe il numero decimale sotto forma frazionaria, e quindi l'operazione si riduce a moltiplicare $\frac{35}{48}$ per $\frac{921}{100}$; perciò il prodotto sarà $\frac{32235}{4800} = 6\frac{3435}{4800}$.

Divisione de' numeri decimali.

165. Nella divisione de' numeri decimali distingueremo due casi : nel primo supporremo il dividendo decimale ed il divisore intero , e nel secondo supporremo l'uno e l'altro decimale.

Divisione di un numero decimale per un numero intero.

166. Un numero decimale si divide per un numero intero facendo astrazione dalla virgola nel dividendo, ed eseguendo la divisione pel divisore come si fa per i numeri interi ; ma poi si distaccheranno dalla dritta del quoziente tante cifre decimali , quante ne aveva il dividendo.

Sia, per esempio, il numero 97,82 da dividersi per l'intero 78.

Considerando il dividendo come intero , ed eseguendo la divisione, come si vede qui

$$\begin{array}{r|l} 9782 & 78 \\ \hline 78 & 125 \\ \hline 198 & \\ 156 & \\ \hline 422 & \\ 390 & \\ \hline 32 & \end{array}$$

a fianco , si avrà per quoziente $125\frac{32}{78}$; e distaccando due cifre decimali dalla dritta della parte intera del quoziente, esso diverrà

$1,25\frac{32}{78}$, cioè , 1 intero 25 centesimi e $\frac{32}{78}$ di un centesimo.

Dim. Essendosi fatta astrazione dalla virgola nel dividendo, esso senza cambiar valore rappresenta 9782centesimi, n.°(155); perciò dividendosi questo numero di centesimi per 78 , il quoziente che si ottiene dinoterà anche centesimi ; laonde , per esprimere sotto forma decimale che dinota 10^{mi} , debbon-si distaccare due cifre decimali dalla sua dritta, n.°(154); e però il detto quoziente diviene 1,25 ; ma poichè nella di-

visione sono rimasti 32 centesimi da dividersi per 78, che fanno $\frac{32}{78}$ di $\frac{1}{100}$, il quoziente totale sarà $1,25\frac{32}{78}$.

Si noti che la frazione ordinaria scritta a fianco del numero decimale dinota parti dell'unità dell'infim' ordine decimale, cioè dinota $\frac{32}{78}$ di $\frac{1}{100}$: e sempre così deve intendersi quando una frazione ordinaria si trova scritta alla dritta di un numero decimale.

167. Se facendosi astrazione dalla virgola nel dividendo, ne risulti un numero minore del divisore; in tal caso il quoziente non può contenere quelle parti decimali dell'unità che rappresenta il dividendo; perciò dobbiamo contentarci di averlo espresso sotto forma di frazione ordinaria con dividere il numero decimale scritto sotto la detta forma pel dato numero intero. Così, per esempio, volendosi dividere 0,32 per 754, il quoziente non potrà contenere 100^{mi}, perchè il numero 32 de' 100^{mi} è minore di 754; quindi si scriverà il numero decimale sotto la forma $\frac{32}{100}$, e si dividerà per 754; laonde si avrà per quoziente $\frac{32}{75400}$.

Se poi il quoziente si voglia espresso in parti decimali dell'unità, allora bisognerà convertire il dividendo in parti decimali più picciole, con aggiungere tanti zeri alla sua dritta quanti se ne richieggono per avere il quoziente espresso in quelle parti decimali che si vogliono. Così nel nostro esempio, per esprimere il quoziente in parti decimali, queste parti debbono essere almeno diecimillesimi; perchè se convertiamo il dividendo in 1000^{mi} con aggiungere un zero alla sua dritta esso diviene 0,320, ed il numero 320 de' 1000^{mi} essendo minore di 754 non può dar 1000^{mi} nel quoziente; ma se il dividendo si converte in 10000^{mi} con aggiungere due zeri alla sua dritta, esso diviene 0,3200, ed

il numero 3200 essendo maggiore di 754 , diviso per 754 , darà per quoziente $0,0004 \frac{184}{754}$.

Divisione di un numero decimale per un altro numero decimale

168. Si trasferisce la virgola verso dritta nel dividendo e nel divisore di tanti posti quante sono le cifre decimali del divisore ; così la divisione si riduce o a quella di un numero decimale per un numero intero , o a quella di un numero intero per un altro numero intero.

Sia , per esempio , da dividersi il numero 83,0242 per 7,56.

Poichè il divisore contiene due cifre decimali , trasferiremo la virgola nel dividendo di due posti verso dritta; quindi l' operazione si riduce a dividere il numero 8302,42 per 756 , cioè a quella di un numero decimale per un numero intero, la quale effettuandosi, si avrà per quoziente $1098 \frac{154}{756}$.

Dim. In effetti, trasferendosi la virgola verso dritta dello stesso numero di posti nel dividendo e nel divisore, si l'uno che l' altro vengono a moltiplicarsi pel medesimo numero ; ma noi sappiamo, n.° (148), che quando il dividendo ed il divisore si moltiplicano per lo stesso numero il quoziente non si altera ; perciò il quoziente che si ottiene prima di trasferir la virgola pareggia quello il quale si ottiene dopo che la medesima si è trasferita ; quindi il numero $1098 \frac{154}{756}$ sarà il quoziente cercato,

Suole anche darsi la seguente regola per la divisione di un numero decimale per un altro.

Si pareggerà il numero delle cifre decimali del dividendo al numero di quelle del divisore , con aggiungere de' zeri a dritta di chi ne ha meno , e poi si farà la divisione.

Difatti sia , per esempio , il numero 25,082 da dividersi per 9,0357. Aggiungendo un zero a dritta del dividendo , le sue cifre decimali divengono tante quante son quelle del divisore ; e scrivendo poi i detti numeri

sotto forma di frazioni ordinarie, l'operazione si riduce a dividere $\frac{250820}{10000}$ per $\frac{90357}{10000}$, e però il quoziente sarà $\frac{250820}{10000} \times \frac{10000}{90357} = \frac{250820}{90357} = 2\frac{70106}{90357}$

169. Se fosse proposto a dividere un numero intero per un numero decimale, si aggiungeranno tanti zeri a dritta del dividendo quante cifre decimali tiene il divisore, e poi si dividerà il numero che ne risulta pel divisore considerato come intero.

Così, per esempio, se dovesse dividersi 36 per 59,034, aggiungeremo tre zeri a dritta del dividendo, e quindi l'operazione si riduce a dover dividere 36,000 per 59,034, laonde il quoziente sarà $\frac{36000}{59034}$.

Difatti, egli è chiaro che in tal modo operando, il dividendo ed il divisore si moltiplicano per lo stesso numero, che nel nostro caso è 1000, e perciò il quoziente non si altera.

170. Se bisognasse dividere una frazione ordinaria per un numero decimale, o viceversa, si scriverà il numero decimale sotto forma di frazione ordinaria, e quindi l'operazione si riduce a dividere una frazione per un'altra.

Così, per esempio, dovendosi dividere 5,64 per $\frac{7}{9}$.

Scrivendo il numero decimale sotto forma di frazione ordinaria, l'operazione si riduce a dividere $\frac{564}{100}$ per $\frac{7}{9}$; laonde il quoziente sarà $\frac{564 \times 9}{700}$:

$$\text{Viceversa, } \frac{7}{9} : 5,64 = \frac{7}{9} : \frac{564}{100} = \frac{700}{9 \times 564}.$$

Riduzione di una frazione ordinaria a frazione decimale

171. Occorrendo spesso ridurre a frazione decimale una frazione ordinaria, o che accompagna il quoziente di una

divisione , o anche che fosse isolata , diamo qui una regola a parte per risolvere un tal problema , quantunque nel numero (124) avessimo trattato in generale del modo come ridurre una frazione ad un'altra di dato denominatore .

Una frazione ordinaria si riduce a decimale esprimente decimi , centesimi , millesimi , ec. , aggiungendo rispettivamente uno , due , tre , ec. zeri alla dritta del suo numeratore , ed il numero che ne risulta si dividerà pel denominatore ; poi dalla dritta del quoziente si distaccheranno tante cifre decimali , quanti sono stati i zeri aggiunti .

Sia , per esempio , la frazione $\frac{5}{7}$ da ridursi a decimale esprimente millesimi .

Aggiungendo tre zeri a dritta del numeratore , esso diviene 5000 , e dividendo 5000 per 7 , si avrà per quoziente $714\frac{2}{7}$, dalla cui dritta distaccando tre cifre decimali , si otterrà il numero $0,714\frac{2}{7}$, il quale sarà uguale alla frazione ordinaria proposta .

Dim. In effetti , ogni frazione essendo uguale al quoziente della divisione in cui il numeratore fa da dividendo ed il denominatore fa da divisore , in questo esempio deve dividersi 5 per 7 ; ma noi vogliamo che il quoziente dinoti millesimi ; dunque dobbiamo convertire l'intero 5 in millesimi , e poi dividerlo per 7 ; ma sappiamo che un intero si converte in millesimi con aggiungere tre zeri alla sua dritta , n.º (153) ; perciò aggiungendo tre zeri a dritta dell'intero 5 , e dividendo il numero 5000 millesimi che ne risulta per 7 , il quoziente 714 che si ottiene dinoterà millesimi ; laonde per indicare con la scrittura decimale che dinota millesimi , dobbiamo distaccare tre cifre decimali dalla sua dritta , e quindi ne verrà il numero decimale $0,714$.

Ma poichè nella divisione sono rimasti 2 millesimi da dividersi per 7 , che fanno $\frac{2}{7}$ di $\frac{1}{1000}$, la proposta frazione

ordinaria verrà esattamente uguale a $0,714\frac{2}{7}$, e prossimamente uguale a $0,714$, differendo dal vero per meno di un millesimo dell'unità.

172. Viceversa, avendosi una frazione decimale, torna meglio alcune volte convertirla in frazione ordinaria, perchè così può aversi espressa in termini più semplici. Ciò si fa scrivendo la frazione decimale sotto forma di frazione ordinaria, e poi dividendo, se è possibile, i suoi termini per uno stesso numero. Così, per esempio, la frazione $0,125$, scritta sotto forma di frazione ordinaria, diviene $\frac{125}{1000}$, e dividendo i suoi due termini per 125 , si riduce ad $\frac{1}{8}$.

A R T. VII.

Delle frazioni decimali periodiche.

173. Allorchando nella divisione che si fa per convertire una frazione ordinaria in decimale, avviene che nel quoziente, da un certo ordine in poi, ritornano le stesse cifre similmente disposte, la frazione decimale che ne deriva si chiama *periodica*, e si dà il nome di *periodo* all'insieme delle cifre che ritornano.

Così, per esempio, volendosi convertire la frazione ordinaria $\frac{8}{37}$ in decimale, non potrà esattamente ciò farsi, perchè eseguendo l'operazione, come si vede qui

8000	37
60	<u>0,216</u>
230	
8	

a fianco (*), si trova il terzo resto uguale al numeratore 8 della frazione proposta; ed aggiungendo un zero a dritta del resto 8, affin di proseguir la divisione, si ricadrà nel divi-

(*) Qui la divisione si è eseguita come fu detto nel n° (75):

dendo primitivo ; quindi nel quoziente tornano ad ottenersi le stesse cifre 2, 1, 6 col medesimo ordine, senza che l'operazione possa aver mai termine. Dunque la frazione decimale 0,216216, la quale si ottiene , sarà periodica , ed il suo periodo si forma da tre cifre.

Sia per secondo esempio la frazione $\frac{26}{825}$.

Essa *svolta* in decimale , secondo si scorge qui di contro , si troverà che il terzo resto 125 è uguale al primo ; e quindi continuando la divisione , dovranno ritornare nel quoziente le stesse cifre 1 e 5 col medesimo ordine, senza aver mai termine l'operazione ; laonde si avrà

$$\begin{array}{r|l} 260000 & 825 \\ 1250 & \\ \hline 4250 & \\ 125 & \end{array} \quad \begin{array}{l} 825 \\ 0,0315... \end{array}$$

una frazione decimale periodica il cui periodo è formato dalle due cifre 1 e 5. Convien intanto avvertire che in questo secondo esempio il periodo comincia dalla terza cifra decimale, e non già dalla prima, come nell'esempio di poc'anzi.

Allorchè il periodo comincia dalla prima cifra decimale, la frazione si chiama *periodica semplice*. Quando poi non comincia dalla prima cifra , si chiama *periodica mista*.

174. *Quando una frazione ordinaria che non è riducibile esattamente in decimale, si svolge in decimale, non si debbon fare più di tante divisioni quante unità meno una sono nel denominatore della frazione proposta , affinchè ritornino nel quoziente le stesse cifre col medesimo ordine.*

Così, per esempio, la frazione $\frac{3}{7}$ *svilupata* in decimale ,

come qui a fianco si vede, dopo la sesta divisio-

ne ritornano nel quoziente le medesime cifre con lo stesso ordine. Difatti i resti delle divisioni dovendo essere sempre minori del divisore 7 , ossia del denominatore della frazione , non possono essere che i numeri 1, 2, 3, 4, 5, 6 ; e poichè avviene che

$$\begin{array}{r|l} 3000000 & 7 \\ 428571 & \\ \hline & 3 \end{array}$$

nelle prime sei divisioni si ottengono questi sei resti che sono tutti differenti, nella settima divisione dovrà ricadersi in uno de' medesimi resti; come in effetti la sesta divisione dà per resto 3, il quale essendo uguale al numeratore della frazione proposta, nella settima divisione tornerà ad aversi nel quoziente la cifra 7 che si era ottenuta a principio, e questa verrà seguita dalla stesse cifre col medesimo ordine; quindi si avrà la frazione periodica semplice $428571428571 \dots$, il cui periodo è formato da sei cifre.

In generale: nel fare la divisione del numeratore pel denominatore, il resto essendo sempre minore del denominatore, i resti differenti non potranno essere più di quante unità meno una sono in esso denominatore; perciò, dopo aver fatte altrettante divisioni, dovrà necessariamente ricadersi in uno de' resti precedenti, e quindi nel continuar la divisione, dovranno ritornare nel quoziente le stesse cifre col medesimo ordine (*).

ART. VIII.

Correzione da farsi all' ultima cifra di un numero decimale approssimato.

175. Sia, per esempio; il numero decimale 0,416298 che voglia esprimersi in millesimi, disprezzando tutte le altre unità degl' ordini inferiori,

Prima di tutto è chiaro che ritenendo il numero 0,426, esso sarà minore del vero, e differisce dal vero per meno di 1 millesimo, perchè sappiamo, n° (159), che le unità

(*) Vedremo nella terza parte di questi elementi il modo come trovare la frazione ordinaria da cui deriva una proposta frazione decimale periodica.

rappresentate dalle cifre degli ordini inferiori, le quali si disprezzano, non giungono a formare 1 millesimo. Ma noi possiamo anche esser sicuri di differire dal vero valore del proposto numero per meno della metà di 1 millesimo aumentando la cifra 6 de' millesimi di una unità, allorchè la cifra seguente de' diecimillesimi è 5 o maggiore di 5; e ritenendo la cifra 6, allorchè quella seguente de' diecimillesimi è minore di 5. Nel primo caso si avrà un numero maggiore del vero, e nel secondo si avrà un numero minore del vero; ma in ambedue i casi si differisce dal vero per meno della metà di 1 millesimo.

In effetti, allorchè la cifra de' diecimillesimi è 5 o maggiore di 5, essa con tutte le altre cifre seguenti formando più di 5 diecimillesimi, cioè più della metà di 1 millesimo, il valore del proposto numero essendo allora uguale a 426 millesimi più una frazione maggiore della metà di 1 millesimo, si avvicina più a 427 millesimi che a 426 millesimi; perciò aumentando la cifra 6 de' millesimi di una unità, il numero 427 millesimi che ne risulta sarà maggiore del vero, ma ne differisce per meno della metà di 1 millesimo.

Se poi la cifra de' diecimillesimi è minore di 5, le unità di questa cifra unite a tutte le unità rappresentate dalle cifre degli ordini inferiori, le quali fanno meno di 1 diecimillesimo, non giungono a formare 5 diecimillesimi, cioè fanno meno della metà di 1 millesimo; quindi in tal caso il numero proposto, essendo uguale a 426 millesimi più una frazione minore della metà di 1 millesimo, si avvicina più a 426 millesimi che a 427 millesimi; perciò, ritenendo 426 millesimi, si ha un numero minore del vero, ma che ne differisce per meno della metà di 1 millesimo.

In generale: Allorchè una quantità vuole valutarli in unità intere di un certo ordine, ed essa è compresa fra due numeri consecutivi rappresentanti queste unità, conviene attenersi alla seguente regola.

Si riterrà il minore o il maggiore de' due numeri accennati, secondo che

la frazione dell'unità da aggiungersi al minore di essi per avere il vero valore della detta quantità sia minore o maggiore della metà di essa unità. Nel primo caso si peccerà per DIFETTO, e nel secondo per ECCESSO; ma nell'uno e nell'altro caso si differisce dal vero per meno della metà dell'unità.

Così, per esempio, una certa lunghezza compresa fra 85 ed 86 palmi, la quale sia maggiore di 85 palmi e mezzo, si dirà essere 86 palmi e non 85; perchè il primo numero differisce meno dal vero. Se poi la detta lunghezza fosse minore di 85 palmi e mezzo, si riterà il numero 85 per esprimere il valore della medesima, perchè si differisce meno dal vero.

Similmente: un esercito, contandosi per unità di migliaia di uomini, se, per esempio, il numero degli uomini fosse compreso fra 63000 e 64000, si dirà di essere 63000, o 64000, secondo che il numero degli uomini da aggiungersi a 63000 sia minore o maggiore di un mezzo migliaio.

176. Avvertimento. Se si abbia un numero decimale approssimato sino ad un certo grado, per esempio, sino a' millesimi, e la cifra dell' infimo ordine, cioè quella de' millesimi fosse zero, un tale zero non potrà sopprimersi, altrimenti non potrà più rilevarsi il grado di approssimazione. Così, per esempio, se nel numero 4,370, approssimato sino ai millesimi si soprimesse lo zero, esso diverrebbe 4,37, il quale sebbene sia uguale a 4,370, non pertanto, trattandosi di numero approssimato, siccome il grado di approssimazione viene indicato dall' unità dell' infimo ordine decimale, nel numero 4, 37 si giudicherebbe che l'approssimazione è sino a' centesimi, e non già sino a' millesimi.



PARTE SECONDA

CAP. I.

DEI NUMERI CONCRETI.

ART. I.

177. In questa seconda parte degli elementi di aritmetica essendoci proposti considerare i numeri concreti, nonché le applicazioni che si fanno di questa scienza a molti problemi che possono occorrere negli usi della società, ci facciamo primieramente ad osservare che le quattro operazioni fondamentali su questi numeri si eseguono come se i medesimi fossero astratti, con le seguenti avvertenze.

Tanto nell' *addizione* quanto nella *sottrazione* de' numeri concreti, le quantità da essi rappresentate debbono essere omogenee e riferite alla medesima unità. Così, per esempio, dovendosi addizionare 8 libbre, più 7 libbre, più 16 libbre di argento, la loro somma sarà uguale a 28 libbre del detto metallo; poichè tutte le unità de' numeri dati sono uguali fra loro. Ma se si proponga ad addizionare 16 libbre con 7 rotoli di argento, sebbene le quantità rappresentate da questi numeri sieno omogenee, pure essi non potranno addizionarsi come numeri astratti: in effetti la loro somma 23 non rappresenterà nè 23 rotoli, nè 23 libbre. Lo stesso può dirsi riguardo alla sottrazione de' numeri concreti.

178. Nella *moltiplicazione* de' numeri concreti le quantità dagli stessi rappresentate possono essere di qualunque natura, ma il prodotto sarà sempre della natura medesima del moltiplicando, come apparisce da tre seguenti esempi.

1.° Se 200 ducati dovessero moltiplicarsi per 8: egli è manifesto che il prodotto 1600, il quale si ottiene, rappresenterà ducati: dunque in questo caso il moltiplicando è un numero concreto, il moltiplicatore è un numero astratto, ed il prodotto è pure un numero concreto della natura stessa del moltiplicando.

2.° Se volesse conoscersi dopo 7 giorni quante miglia avrà percorso un corriere, il quale fa 20 miglia al giorno: è chiaro che bisognerà moltiplicare il numero 20 delle miglia che il corriere fa in un giorno pel numero 7 de' giorni; cioè si deve moltiplicare un numero concreto per un altro anche concreto di natura diversa, ma questo secondo numero si considera come astratto, ed il prodotto 140 che ne risulta, esprimendo miglia, sarà un numero concreto della natura stessa del moltiplicando.

3.° Se abbiasi sur una tavola un numero di monete disposte in 6 file verticali ciascuna delle quali ne contenga 8; si avrà un quadro di monete simile a quello del numero (34), il quale può considerarsi composto ancora da 8 file orizzontali, ciascuna delle quali contiene 6 monete; ed è manifesto che il numero delle monete contenute in questo quadro si ottiene moltiplicando il numero di quelle contenute in una fila verticale pel numero di quelle contenute in una fila orizzontale, cioè sarà $8 \times 6 = 48$. Dunque esso si ottiene moltiplicando fra loro due numeri concreti della medesima natura; ma è chiaro che quello il quale fa da moltiplicatore si considera come astratto, ed il prodotto a cui si giunge è un numero concreto della stessa natura del moltiplicando.

179. Nella *divisione* il dividendo essendo un prodotto, il

quale nasce dal moltiplicare il quoziente pel divisore, ne segue che, se il dividendo è un numero concreto ed il divisore è astratto, il quoziente sarà un numero concreto della stessa natura del dividendo. Se poi il dividendo ed il divisore sono ambedue concreti di natura diversa, il quoziente sarà pure un numero concreto, ma sarà della stessa natura del dividendo, e nell'operazione il divisore viene a considerarsi interamente come numero astratto. Infine se il dividendo ed il divisore sono ambedue concreti della stessa natura, il quoziente sarà un numero astratto. Tutto ciò vien dichiarato da' tre seguenti esempi.

1.° Se 12 canne di tela debbansi dividere in 4 parti uguali, il dividendo è numero concreto, ed il divisore è numero astratto; ma il quoziente 3 che si ottiene, rappresentando canne, sarà un numero concreto della medesima natura del dividendo.

2.° Se poi 12 canne di tela dovessero dividersi a 4 persone; il dividendo ed il divisore sono ambedue numeri concreti, ma nell'eseguire la divisione il divisore viene a considerarsi come astratto, ed il quoziente sarà un numero concreto della stessa natura del dividendo.

3.° Se la raccolta fatta da un proprietario in un anno è stata di 240 tomoli di frumento, e nell'anno seguente è stata di 80 tomoli; volendosi conoscere la prima raccolta quanta sia rispetto alla seconda, è chiaro che dovranno dividersi i 240 tomoli della prima raccolta per gli 80 tomoli della seconda, ed il quoziente 3 indicherà che la prima raccolta è tripla della seconda. Qui si scorge che il dividendo ed il divisore sono ambedue concreti della stessa natura, ma il quoziente 3 il quale si ottiene è un numero astratto.

180. Le osservazioni che abbiamo fatte fin ora riguardo alla natura de' dati e de' quesiti appartengono a tutti i numeri concreti; ma il modo di eseguire le quattro operazio-

ni su i detti numeri ha bisogno di particolari considerazioni allorchè si tratta di quei numeri concreti che diconsi complessi : quindi è che i sei seguenti articoli saranno destinati a contemplare tutto ciò che riguarda questi ultimi numeri.

A R T. II.

De' numeri complessi o denominati.

181. I numeri concreti prendono il nome di *complessi* o *denominati* allorchè l'unità si divide in un numero convenuto di parti, e ciascuna di queste parti si suddivide in un numero anche convenuto di parti più piccole, e così di seguito, purchè la divisione non segua il sistema decimale.

Quell'unità la quale si divide e suddivide in parti più piccole chiamasi *unità principale*. Le parti nelle quali essa si divide e suddivide diconsi *unità secondarie*, e distinguonsi in diverse *specie* secondo la loro diversa grandezza : le più piccole diconsi unità dell'*infima specie*. Così, per esempio, il giorno dividendosi in 24 ore, l'ora in 60 minuti primi, il minuto primo in 60 minuti secondi, e non concependo diviso il minuto secondo in parti più piccole; il giorno sarà l'unità principale, le ore, i minuti primi, ed i minuti secondi saranno le unità secondarie delle diverse specie, i minuti secondi poi saranno le unità dell'infima specie.

182. Apprendemmo nel numero (6) che una grandezza si misura prendendo un'altra qualunque della stessa specie per unità, e trovando il numero che esprime quante di queste unità o parti della stessa sono contenute nella grandezza proposta. Le principali grandezze che occorre misurare negli usi della società sono le linee, le superficie, i volumi, i pesi, il tempo : dunque le principali unità di cui si fa uso sono,

la lineare, la superficiale, quella di volume, quella di peso, e quella di tempo.

L'*unità lineare*, com'è chiaro, serve a misurare le linee, ossia le distanze che passano da un punto ad un altro: essa perciò è una *linea retta* di convenuta lunghezza.

Per *unità superficiale* si prende ordinariamente il *quadrato*: esso è una porzione di superficie piana racchiusa da quattro linee rette uguali che s'incontrano perpendicolarmente, come si vede nella figura qui a fianco. Ciascuna delle quattro rette AB, BC, CD, AD si chiama *lato* del quadrato. Se il lato del quadrato è lungo un palmo, la figura ABCD si chiama *palmo quadrato*; similmente prenderà il nome di *piede quadrato*, di *metro quadrato* ec., se il detto lato fosse lungo un piede, un metro ec.



L'*unità di volume* di cui ordinariamente si fa uso è il *cubo*: esso è un volume racchiuso da sei facce che sono tutte quadrati uguali: e ciascuna delle 12 linee rette uguali, che sono lati delle facce quadrate del cubo, si chiama *lato* del cubo. Il cubo che ha per lato un palmo si chiama *palmo cubo* o *cubico*: così pure il cubo che ha per lato un piede, un metro, ec. si chiama rispettivamente *piede cubo*, *metro cubo* ec.

Per *unità di peso*, si prende ordinariamente un volume di forma cubica di acqua distillata ad una data temperatura e pressione barometrica.

L'*unità di tempo* è il giorno solare, cioè l'intervallo di tempo che passa da un sorgere e l'altro del sole.

Evvì ancora l'*unità di moneta*, la quale ordinariamente consiste in un determinato peso di argento coniato, in cui è stabilita la quantità di argento puro che è mista ad altro metallo più vile (ordinariamente al rame).

Si chiama *sistema metrico* di una popolazione il complesso di tutte le misure che sono in uso presso la medesima.

Le condizioni a cui deve soddisfare un buon sistema metrico sono: che tutte le misure derivono con rapporti semplici ed esatti dalla unità lineare, e questa deve ricavarsi da un fatto immutabile in natura, affinché in ogni tempo, anche se venissero distrutti i *moduli* o *cambioni* della detta unità, essa possa ritrovarsi. Fu perciò che nel 1799 una Commissione di dotti, in maggior parte francesi ed italiani, si determinò a stabilire per unità *lineare* una parte aliquota del meridiano terrestre. A tal uopo si pose per essi ogni cura in misurare il quarto del meridiano di Parigi compreso fra l'equatore ed il polo nord, e si fissò per unità lineare la diecimilionesima parte di questo arco, alla quale si diede il nome di *metro* (misura per eccellenza).

Un sistema metrico poi si accosta ad esser perfetto, allorché le divisioni e suddivisioni dell'unità sono uniformi, e sarà tale, allorché le divisioni o suddivisioni di tutte le unità sono decimali.

Prima d'intraprendere le quattro operazioni su i numeri complessi, giova far conoscere quelli di cui si fa uso tuttavia in Napoli ed in Francia, tanto più perché conviene adoperarli negli esempi che dovremo addurre: parleremo dunque qui appresso del sistema metrico del Regno di Napoli e di quello francese.

A R T. III.

Sistema metrico Napolitano anteriore alla legge del 6 aprile 1840.

183. L'unità lineare per gli usi di commercio era il *palm*. Esso dividevasi in 12 *once*, l'oncia in 5 *minuti*, ed il minuto in 10 *punti*. Otto palmi formavano una *canna*.

Gli Architetti facevano uso della *pertica* che dividevasi in 10 palmi.

Per le misure agrarie l'unità lineare era il *passo* uguale a 7 palmi ed un terzo.

Per le misure geografiche si faceva uso del *passo geografico* uguale a 7 palmi, e perciò era diverso del passo agrario.

L'unità di superficie per le misure comuni era il *palm* quadrato, e solevasi anche far uso della *canna* quadrata.

Per le misure agrarie l'unità di superficie era il *moggio*, cioè un quadrato avente per lato 30 passi agrarii, ossia 220 palmi. Esso dividevasi in 10 *quarte*; la quarta in 9 *nonc*, e la nona in 5 *quinte*: così un moggio veniva a dividersi in 450 quinte.

L'unità di volume distinguevasi in unità di *capacità* per i liquidi e per gli aridi, ed in unità di *solidità* per le fabbriche, per il legno in massa continua, pel marmo, pel metalli, ec.

L'unità di misura per l'acqua e pel vino era il *barile* che dividevasi in 60 *caniffe*. Dodici barili formavano una *botte*, e 2 botti formavano un *carro*.

L'unità di misura per l'olio era lo *staio*. Esso dividevasi in 16 *quarti*, ed il quarto in 6 *misurelli*. Lo staio poi in peso eguagliava rotoli 10 $\frac{1}{3}$. Sedici staia formavano la *salma*.

L'unità di misura per gli aridi, come pel grano, nori, legumi, ec. era il *tomolo*. Esso dividevasi in 4 *quarte*, e la quarta in 6 *misure*; quindi il tomolo veniva uguale a 24 *misure*.

L'unità di solidità per misurare le fabbriche era un quarto di canna cubica, che chiamavasi canna di *costanza*.

L'unità di peso era il *rotolo*. Esso si divideva in 33 *oncie*, ed un terzo, l'oncia in 10 *dramme*, la dramma in 3 *trappesi* o *scrupoli*, e lo scrupolo in 20 *acini* o *grani*: e però il rotolo veniva a dividersi in 1000 trappesi.

Per i grandi pesi prendevasi per unità, il *cantaio* equivalente a 100 rotoli.

La calce soleva misurarsi con un'unità detta *peso* equivalente a 40 rotoli.

Per taluni generi si prendeva per unità la *libra*. Essa dividevasi in 12 *once* uguali a quelle del rotolo; e quindi l'oncia veniva a dividersi in 30 trappesi, ed in 600 acini.

L'unità di moneta è il *ducato*, esso si divide in 10 *carlini*, il carlino in 10 *grani*, ed il grano in 12 *calli*.

*Sistema metrico del Regno di Napoli sanzionato con legge
del 6 aprile 1840.*

184. » Art. 2. La base dell'intero sistema, il *palmo*, è la
» settemillesima parte di un minuto primo del grado medio
» del meridiano terrestre, ovvero la settemillesima parte del
» miglio geografico d'Italia, o miglio nautico di sessanta a
» grado. Esso sarà diviso in parti decimali, e dieci palmi co-
» stituiranno la *canna*.

» La *Canna* lineare, la *Canna* quadrata, e la *Canna* cuba
» sono le unità di misura di lunghezza, di superficie, e di
» solidità per tutti gli usi. La prima è uguale a dieci palmi
» lineari, la seconda a cento palmi quadrati, e la terza a
» mille palmi cubi.

» Rapporto col sistema metrico decimale. Cento metri
» uguagliano trecento settantotto palmi, e quindi un pal-
» mo è uguale a metri 0,26455.

» Art. 3.^o L'unità superficiale delle misure agrarie sarà
» il *moggio* di diecimila palmi quadrati, o sia un quadrato
» che abbia uno de' lati cento palmi, o canne dieci. Esso
» sarà diviso in parti decimali.

» Art. 4.^o Il *tomolo* è l'unità delle misure di capacità
» per gli aridi. Esso equivale a tre palmi cubi, e si divide
» in due *mezzette* o in quattro *quarte*, o pure in ventiquat-
» tro misure, ciascuna delle quali uguaglia il cubo del mez-
» zo palmo.

» La misura degli aridi sarà praticata sempre a *raso*, e
» non a *colmo*.

» Art. 5.^o Il *barile* è l'unità delle misure di capacità per
» alcuni de' liquidi, come il vino, l'aceto, l'acqua, e si di-
» vide in sessanta *caraffe*.

» Esso equivale ad un cilindro retto del diametro di un palmo, e di tre palmi di altezza.

» La botte si compone di dodici barili, ed è perciò uguale ad un cilindro retto di tre palmi di diametro, e quattro palmi di altezza.

» Art. 6.^o L'olio sarà misurato sempre a peso; a cantaja cioè, a rotoli ed a frazioni decimali di rotolo.

» Pel commercio a minuto potrà misurarsi a capacità: le misure dovranno essere di figura cilindrica e corrispondenti al peso di olio che debbono contenere alla temperatura di 20° del termometro centigrado.

» Art. 7.^o Il rotolo è l'unità di misura de' pesi, e si dividerà in parti decimali; la sua parte millesima è il *trappeso*.

» Il *cantajo* si compone di cento rotola,

» Rapporto col sistema metrico decimale. Un rotolo è uguale a Chilogrammi 0,890997.

» Un palmo cubo di acqua distillata pesa in Napoli, nella *paria*, rotola venti e settecento trentasei trappesi alla temperatura di 16°, 144 del termometro centigrado (12°, 92 di Reaumur) ed alla pressione barometrica di palmi 2,863 ossia di 28 pollici (0, met. 76).

» Art. 8.^o Sarà tollerato per ora, e sino a nuova disposizione, che pe' soli usi farmaceutici sia adoperato il peso della *libbra* colle sue attuali suddivisioni,

185. Un palmo cubico di acqua distillata si è detto che pesa rotoli 20 e 736 trappesi alla temperatura di gradi 16,144 del termometro centigrado, ed alla pressione barometrica di 28 pollici; ma il rapporto del rotolo al chilogrammo (secondo asserisce il ch. professore Amante) vien meglio fissato alla temperatura di 16° $\frac{1}{6}$ centigradi, la quale può dirsi la media di Napoli, e differisce di $\frac{1}{42}$ di grado da quella riportata nella legge. A tal temperatura e pressione, un'oncia cubica di acqua distillata, cioè il cubo di $\frac{1}{12}$ di palmo, pesa 12 trappesi: e quindi 1 palmo cubico, che equivale a 1728 once cubiche, pesa 20 rotoli e 736 trappesi. Un rotolo poi eguaglia la 12^{ma}

parte del cubo che ha per lato 10 once, ossia $\frac{5}{8}$ di palmo, ripieno di acqua distillata alla detta temperatura e pressione. Quest'ultimo rapporto fu quello trovato dal Colonnello Visconti (poscia Brigadiere), ed a lui è dovuta la lode di aver dimostrato il primo che il sistema metrico di Napoli godeva tutte le qualità di un buon sistema metrico, facendo vedere come tutte le misure potevano derivare con rapporti semplici ed esatti, dall' unità lineare, e questa essere una parte aliquota del quarto del meridiano di Parigi.

N. B. Il rolo del nuovo sistema metrico è rimasto uguale all'antico; ma il palmo, il tomolo, ed il barile hanno variato di una picciola frazione. Il nuovo palmo è uguale ad 1 palmo antico e 0,00334. Il nuovo tomolo è uguale ad un tomolo antico e 0,00409. Il nuovo barile è uguale a 0,99888 del barile antico; e quindi la nuova caraffa è pure uguale a 0,99888 dell' antica. Il Colonnello Visconti fece chiaramente vedere che il vecchio palmo in origine doveva essere uguale al nuovo: e quindi ne conchiuse che quella picciolissima differenza la quale si trovava fra il nuovo e l'antico palmo doveva in parte attribuirsi al tempo che aveva resi logori i cambioni, ed in parte agli errori di costruzione nel rifarli.

*Sistema metrico di Sicilia determinato con legge
del 31 dicembre 1809.*

186. Il *palm*o, unità di lunghezza, si divide in 12 *once*, l'oncia in 12 *linee*, la linea in 12 *punti*. Una *canna* è uguale a 8 palmi.

Il *miglio* equivale a 5760 palmi, e si compone di 45 *corde*: la corda contiene 4 *catene*, e la catena 4 canne.

L'unità delle misure agrarie è la *salma*, che è un quadrato avente per lato 64 canne: la salma si divide in 4 *bisacce*, la bisaccia in 4 *tomoli*, il tomolo in 4 *mondelli*, il mondello in 4 *carozzi*, il carrozzo in 4 *quarti*, per cui il quarto risulta di quattro canne quadrate.

La misura di capacità per gli aridi è il *tomolo* equivalente ad un palmo cubo; si divide in 4 *mondelli*, ed il mondello in

carozzi, quarti, e quartigli, sempre di 4 in 4. Sedici tomoli formano la *salma*.

La misura di capacità pe' liquidi è il *quartaro* che è pure uguale ad un palmo cubo; si divide in 20 *quartucci*, il quartuccio in 2 *caraffe*, la caraffa in 2 *bicchieri*. Due quartari formano un *barile*, e 32 barili una *botte*.

L'unità di peso è il *rotolo* che corrisponde ad un quartuccio di olio d'oliva puro e lampante pesato a Palermo nell'aria, alla temperatura di 64° di Fahrenheit, ossia di 14° $\frac{5}{9}$ di Reaumur; si divide in 30 *once*, l'oncia in 8 *dramme*, la dramma in 3 *scrupoli*, lo scrupolo in 20 *grani*, il grano in 8 *ovavi*. La libbra è di 12 once, ed il cantaio di 100 rotoli.

187. Il sig. Visconti tenendo conto di tutte le circostanze, ed usando la massima precauzione e diligenza trovò che il palmo siciliano è $\frac{40}{41}$ del nostro palmo; e quindi, paragonato al metro, è $\frac{40}{41}$ di metri 0,26455, cioè pareggia metri 0,258098. Egli trovò ancora che il rotolo Siciliano equivale a chilogrammi 0,79342, e che corrisponde ad 80 once cube Siciliane di acqua distillata pesata a Palermo sotto la pressione barometrica di 28 pollici, ed alla temperatura di 17°, 82 di Reaumur (*).

Antico sistema metrico francese.

188. L'unità lineare era il *pie**de*, che dividevasi in 12 *pollici*, il pollice in 12 *linee*, e la linea in 12 *punti*. Sei piedi formavano una *tesa* (**).

Vi era anche l'unità lineare detta *auna* di cui servivansi ne' generi di telerie, ed equivaleva a 3 piedi, 7 pollici, 10 linee e $\frac{5}{6}$.

Per le grandi distanze vi era la *lega* di 25 a grado, e la *lega marina* di 20 a grado.

L'unità di peso era la *libra*, che dividevasi in 2 *marchi*,

(*) Un rotolo siciliano è uguale a 0,8903 del rotolo di Napoli.

(**) Un piede equivale a palmi 1,22789.

il marco in 8 *once*, l'oncia in 8 *grossi*, il grosso in 3 *scrupoli*, e lo scrupolo in 24 grani (*).

Per le misure agrarie facevasi uso di un'unità detta *arpento*; ma vi erano due sorte di arpenti, cioè l'arpento di acque e foreste e l'arpento di Parigi; sì l'uno che l'altro si componevano di 100 pertiche quadrate; ma la pertica delle acque e foreste uguagliava 22 piedi, e quella di Parigi 18.

L'unità monetaria era la *lira tornese* che dividevasi in 20 *soldi*, ed il soldo in 12 *danari*. Essa era di maggior valore di una moneta più antica detta semplicemente *lira*, che aveva le medesime suddivisioni della *lira tornese* (**).

Nuovo sistema metrico francese.

189. L'unità lineare è il *metro*, che equivale alla diecimillesima parte della distanza del polo all'equatore contata sul meridiano di Parigi.

I multipli decimali dell'unità, sia lineare sia qualunque, si enunciano facendo precedere il nome dell'unità dalle parole *deca*, *etto*, *chilo*, *miria* che significano rispettivamente *dieci*, *cento*, *mille*, *diecimila*. I sottomultipli si enunciano facendo precedere il nome dell'unità dalle parole *deci*, *centi*, *milli*, che significano *decimi*, *centesimi*, *millesimi* dell'unità. Così, per esempio, si dice *decametro*, *centimetro*, *chilometro*, *miriametro* per dinotare rispettivamente dieci, cento, mille, diecimila metri, e dicesi *decimetro*, *centimetro*, *millimetro* per dinotare decimi, centesimi, millesimi di metro.

Per le grandi distanze si prende per unità il chilometro o il miriametro.

L'unità di superficie è il metro quadrato.

(*) Una libra francese equivale a rotoli 0,51939.

(**) La lira tornese equivale a grani 23,3

Per le misure agrarie l'unità di superficie è il decametro quadrato, che si chiama *ara*. In quanto a' suoi composti sogliono usarsi la sola *ettara*, e la *centiara*.

L'unità delle misure di volume è il metro cubo che chiamasi *stero*. I suoi composti in uso sono il *decastéro* ed il *decistéro*.

L'unità di misura per i liquidí e per gli aridi è il decimetro cubo che chiamasi *litro*. I suoi composti che più si usano sono il *decalitro*, l'*ettolitro*, il *chilolitro*, ed il *decilitro*.

L'unità di peso è il *grammo*. Esso equivale al peso di un centimetro cubo di acqua distillata alla temperatura di 4 gradi del termometro centigrado nel vuoto. Si fa uso di tutti i composti del grammo e con particolarità del *chilogrammo*.

L'unità di moneta è il *franco* il quale si divide in decimi e centesimi. Esso equivale al peso di 5 grammi di argento che contengono $\frac{1}{10}$ di altro più vile metallo (*).

ART. IV.

Riduzione de' numeri complessi.

190. Sotto questo titolo comprenderemo tutte quelle operazioni che hanno per oggetto di convertire le unità delle diverse specie di un numero denominato in unità dell'infima specie, e viceversa; ovvero hanno per oggetto di trasformare tutte le unità secondarie in una sola frazione ordinaria o decimale dell'unità principale, e reciprocamente.

(*) Il franco equivale a grani 23,5.

*Riduzione di un numero complesso ad unità
dell' infima specie.*

191. Sieno , per esempio , 54 canne , 7 palmi , 8 once ,
e 3 minuti che vogliansi ridurre a minuti .

.Cominceremo dal ridurre primieramente le 54	54
canne a palmi moltiplicandole per 8 , perchè ogni	8
canna si divide in 8 palmi : e però , intavolando	<u>432</u>
l'operazione come si vede qui a fianco , si otten-	7
gono per prodotto 432 palmi , a' quali aggiun-	<u>439</u>
do i 7 palmi del numero dato ne risulteranno 439	12
palmi. Poi questi palmi si ridurranno ad once mol-	<u>878</u>
tuplicandoli per 12 , perchè ogni palmo si divide	439
in 12 once , e si avranno per prodotto 5268 once,	<u>5268</u>
alle quali aggiungendo le 8 once del numero pro-	8
posto si otterranno 5276 once. Infine queste once si	<u>5276</u>
ridurranno a minuti moltiplicandole per 5 , per-	5
chè ogn' oncia si divide in 5 minuti , ed al prodot-	<u>26380</u>
to 26380 che si ottiene aggiungendo i 3 minuti ne ri-	3
sulteranno 26383 minuti : quindi si conchiuderà	<u>26383</u>
che il dato numero complesso , ridotto a minuti ,	
equivale a 26383 minuti.	

Se dovesse convertirsi una sola unità principale in unità
dell' infima specie, per esempio, una canna in minuti, si ri-
durra prima la canna in palmi moltiplicando 1 per 8 , per-
chè una canna si divide in 8 palmi ; poi gli 8 palmi che ne
risultano si riducono in once moltiplicandoli per 12 , per-
chè il palmo si divide in 12 once, e si avranno per prodot-
to 96 once. Infine le 96 once si ridurranno a minuti molti-
plicandole per 5 , perchè ogni oncia si divide in 5 minuti ,
e ne risulteranno per prodotto 480 minuti : quindi la canna
equivale a 480 minuti.

Essendo dato un certo numero di unità dell' infima specie , che contiene unità delle specie superiori , estrarne queste unità.

192. Sieno date , per esempio , 35746 linee , da cui vogliansi estrarre i pollici , i piedi , e le tese ove mai ne contenessero. Si cominceranno ad estrarre dalle 35746 linee le unità della specie prossima, cioè i pollici , dividendo 35746 per 12, perchè 12 linee fanno 1 pollice; e però intavolando l'operazione come si vede qui a fianco,* il quoziente 2978 che si ottiene dinoterà pollici , ed il resto 10 dinoterà linee. Poi dal numero 2978 de' pollici si estrarranno i piedi dividendolo per 12 , perchè un piede è uguale a 12 pollici , quindi il quoziente 248 che ne risulta dinoterà piedi; ed il resto 2 dinoterà pollici. Infine dal numero 248 de' piedi si estrarranno le tese dividendolo per 6, perchè 6 piedi fanno una tesa; laonde il quoziente 41 che n' emerge dinoterà tese, e il resto 2 dinoterà piedi: adunque le 35746 linee date sono uguali a 41^{tes.} 2^{pi.} 2^{po.} 10^{li.}

$$\begin{array}{r|l} 35746 & 12 \\ 10 & \overline{2978} \quad 12 \\ & 2 \quad \overline{248} \quad 6 \\ & & 2 \quad \overline{41} \end{array}$$

Riduzione delle unità secondarie di un numero denominato a frazione ordinaria o decimale dell' unità principale.

193. Sia, per esempio, il numero 8 libbre, 5 oncie, 7 dramme , 2 trappesi , e 9 acini , le cui unità secondarie , cioè le oncie, le dramme , i trappesi , e gli acini vogliansi ridurre a frazione ordinaria della libbra.

Si ridurranno tutte le unità secondarie ad unità dell' infima specie , cioè le 5 oncie , le 7 dramme , i 2 trappesi , ed i 9 acini si ridurranno tutti ad acini, e ne risulteranno 3469

acini : poi anche un' unità principale, ossia una libra, si ridurrà ad acini, e viene uguale a 7200 acini ; quindi l'acino sarà la 7200^{esima} parte della libra ; ma le 5 onze le 7 dramme i 2 trappesi ed i 9 acini fanno 3469 acini , perciò sono ugualia $\frac{3469}{7200}$ della libra. Dunque 8^{lib.} 5^{on.} 7^{dr.} 2^{tr.} 9^{ac.} pareggiano libre 8 $\frac{3469}{7200}$.

Può osservarsi che il numeratore della cercata frazione ordinaria si forma riducendo tutte le unità secondarie ad unità dell' infima specie , ed il denominatore si forma riducendo una sola unità principale ad unità dell' infima specie.

Se poi le unità secondarie volessero ridursi a frazione decimale dell' unità principale, converrà prima ridurle a frazione ordinaria della detta unità, e poi questa si convertirà in decimale. Così, per esempio, le unità secondarie di poc' anzi volendosi convertire in millesimi di libra , si troverà che 8^{lib.} 5^{on.} 7^{dr.} 2^{tr.} 9^{ac.} pareggiano libre 8,048 $\frac{13}{72}$.

Essendo data una frazione ordinaria o decimale dell' unità principale , ridurla in numero denominato.

194. Sieno, per esempio, $\frac{32}{47}$ di canna che vogliansi convertire in parti denominate della stessa , cioè in palmi , onze , e minuti.

Poichè ogni frazione equivale al $32/47$
 quoziente della divisione in cui il nu- $8 \overline{) 32}$ *5pal. 5on. 1mi. $\frac{38}{47}$*
 meratore fa da dividendo e il deno- $\frac{256}{21}$
 minatore fa da divisore, in questo $\frac{21}{12}$
 esempio debbonsi dividere 32 canne $\frac{42}{21}$
 per 47; ma 32 non potendosi divi-
 dere per 47, ridurremo le 32 canne a 21
 palmi moltiplicandole per 8, e poi il $\frac{252}{17}$
 numero 256 de' palmi che ne risulta $\frac{17}{5}$
 si dividerà per 47: si otterranno così
 per quoziente 5 palmi; ma vi restano $\frac{85}{38}$
 altri 21 palmi da dividersi per 47, i
 quali perciò si ridurranno ad once
 moltiplicandoli per 12, e le 252 once che ne risultano si
 divideranno per 47; si ottengono così per quoziente 5 ou-
 ce, ma vi restano altre 17 once da dividersi per 47, quindi
 esse si ridurranno a minuti moltiplicandole per 5, e gli 85
 minuti che n'emergono si divideranno per 47; e poichè si
 ottiene per quoziente 1 minuto, e per resto 38 minuti, i
 quali divisi per 47 danno per quoziente $\frac{38}{47}$ di minuto, ne
 conchiuderemo che la frazione $\frac{32}{47}$ di canna equivale a *5pal.
 5on. 1mi. $\frac{38}{47}$.*

Se la proposta frazione fosse decimale, allora si converte
 facilmente in numero denominato, perchè le divisioni pel
 denominatore si fanno distaccando con la virgola tante cifre
 decimali quanti zeri esso contiene.

Così, per esempio, se 0,57 di canna debbansi convertire
 in parti denominate dalla stessa; scrivendo la frazione de-
 cimale sotto forma di frazione ordinaria, essa diviene uguale
 a $\frac{57}{100}$; e poichè ogni frazione equivale al quoziente della
 divisione del numeratore pel denominatore, qui debbonsi
 dividere 57 canne per 100, ma non potendosi dividere, le ri-
 durremo a palmi moltiplicandole per 8, e ne risulteranno

456 palmi , i quali si divideranno per 100 con distaccar due cifre decimali della dritta del numero 456, si avranno così 4 palmi per quoziente , e vi restano 56 palmi da dividersi per 100 ; perciò questi palmi si riducono ad once moltiplicandoli per 12, e le 672 once che ne risultano si divideranno per 100 ; si avranno così per quoziente 6 once , e vi restano altre 72 once da dividersi per 100 , le quali perciò si ridurranno a minuti , ed i 360 minuti che n' emergono si dividono per 100 , laonde si avranno per quoziente 3 minuti e 60 centesimi di minuto : quindi si conchiude che la frazione decimale proposta è uguale a 4^{pal.} 6^{on.} 3^{mi.} 6.

ART. V.

Addizione de' numeri denominati.

193. Sieno, per esempio , da addizionarsi 78^{can.} 7^{p.} 5^{o.} 3^{m.} con 26^{can.} 5^{p.} 10^{o.} 4^{m.} e con 9^{can.} 1^{p.} 11^{o.} 0^{m.}

Si scrivono i numeri da addizionarsi l'uno sotto l'altro in modo che le unità della stessa specie corrispondano in una medesima colonna , come si scorge qui a fianco, e vi si tira una linea al di sotto (*). Poi si comincia dall'addizionare le unità dell'infima specie, cioè i minuti, e si avrà per somma 7 minuti; ma perchè 7 minuti fanno 1 oncia e 2 minuti , si scrivono i 2 minuti sotto la linea nella colonna de' minuti , e l' oncia si ritiene per unirli

can.	p.	o.	m.
78	7	5	3
26	5	10	4
9	1	11	0
114	7	3	2

(*) Onde aver sott'occhio in quante unità della specie inferiore si divida un'unità di una certa specie di un numero denominato, il numero che dinota questa divisione suole scriversi sopra

alla colonna delle once. Poi si passa a sommare i numeri della colonna delle once, a' quali si aggiunge l'oncia ritenuta, e si avranno 27 once; ma queste perchè fanno 2 palmi e 3 once, si scrivono le 3 once sotto la linea nella colonna delle once, ed i 2 palmi si ritengono per unirli alla colonna de' palmi. Indi si passa ad addizionare i numeri della colonna de' palmi, a' quali aggiungendo i 2 palmi di ritenuta si avranno per somma 15 palmi; ma perchè 15 palmi fanno una canna e 7 palmi, si scrivono i 7 palmi sotto la colonna de' palmi e la canna si ritiene per unirla alla colonna delle canne. Infine si passa ad addizionare i numeri della colonna delle canne, a' quali si aggiunge la canna ritenuta, e si avranno per somma 114 canne: dunque la somma cercata sarà 114 can. 7p. 3o. 2m.

Della stessa guisa si opererebbe su qualunque altro esempio.

Le *PROVE* poi delle quattro operazioni relativamente a' numeri denominati riposando su gli stessi principii che quelle riguardo a' numeri interi, potranno eseguirsi della maniera medesima che si operò su questi numeri.

ART. VI.

Sottrazione de' numeri denominati.

196. Sia, per esempio, il numero 15lib. 9o. 3d. 2^{te} 5a. che deve togliersi dall' altro 29lib. 7o. 6d. 0^{te} 16a.

le unità della specie inferiore. Così, per esempio, il primo nume-

ro dell' addizione proposta si scrive $\begin{matrix} 8 & 12 & 5 \\ \text{can.} & \text{p.} & \text{o.} & \text{m.} \end{matrix}$ 78 7 5 3, per indicare che la canna si divide in 8 palmi, il palmo in 12 once, e l'oncia in 5 minuti.

Si scrive il numero minore sotto il maggiore in modo che le unità della stessa specie sieno situate l'una sotto l'altra , come si vede qui a fianco , e vi si tira una linea al di sotto. Poi si comincia la sottrazione dalle unità dell' infima specie, cioè si tolgono i 5 acini

da' 16 acini , ed il resto 11 si scrive sotto la linea nella colonna degli acini.

lib.	o.	d.	t.	a.
29	7	6	0	16
15	9	3	2	5
13	10	2	1	11

Iudi si passa a togliere i 2 trappesi da zero trappesi, ma non potendosi , ci faremo imprestare una dramma dalle 5 dramme , la quale ridotta in trappesi fa 3 trappesi ; perciò toglieremo i 2 trappesi da 3 trappesi, ed il resto 1 si scrive sotto la linea nella colonna de' trappesi. Poi si passa a togliere le 3 drammie da 5 dramme , perchè le 6 dramme sono rimaste 5 , ed il resto 2 si scrive al di sotto. Iudi si passa a togliere le 9 ounce delle 7 ounce, ma non potendosi , ci faremo imprestare una libra dalle 29 libbre, la quale ridotta in ounce ed aggiunta alle 7 ounce , fa 19 ounce ; perciò toglieremo 9 ounce da 19 ounce , e si avranno per resto 10 ounce , che scrivonsi al di sotto. Infine si toglieranno le 15 libbre da 28 libbre , perchè le libbre sono rimaste 28 , e si avranno per resto 13 libbre. Dunque il resto cercato sarà 13lib. 10o. 2d. 14. 11a. Della stessa guisa si opererebbe su qualunque altro esempio.

A R T. VII.

Moltiplicazione de' numeri denominati.

197. Nella moltiplicazione de' numeri denominati distingueremo due casi principali , cioè quando il moltiplicando è numero denominato ed il moltiplicatore è numero intero, e quando ambedue sono numeri denominati.

*Moltiplicazione di un numero denominato
per un numero intero.*

198. Sieno , per esempio, 57^{tes.} 5^{pi.} 8^{po.} 9^{li.} da moltiplicarsi per 43.

Si moltiplicheranno separatamente le linee , i pollici , i piedi , e le tese per 43 , intavolando l'operazione come si vede qui di contro ; e perchè il prodotto delle 9 linee per 43 è 387 linee, esso contenendo pollici, se n' estrarranno i pollici dividendoli per 12 , perciò il quoziente 32 che si ottiene dinoterà pollici, ed il resto 3 dinoterà linee. Poi i 32 pollici si aggiungono al prodotto degli 8 pollici per 43, che è 344, si avranno così 376 pollici, i quali contenendo piedi, se n' estrarranno i piedi dividendoli per 12, laonde il quoziente 31 che ne risulta dinoterà piedi, ed il resto 4 dinoterà pollici. Indi i 31 piedi si aggiungeranno al prodotto de' 5 piedi per 43, che è 215 , e si avranno 246 piedi , i quali contenendo tese , se n' estrarranno le tese dividendoli per 6, il quoziente 41 che si ottiene dinoterà tese, e vi restano zero piedi. Infine le 41 tese si aggiungeranno al prodotto delle 57 tese per 43 , che è 2451 , e si avranno per somma 2492 tese ; laonde il prodotto cercato sarà 2492^{te.} 0^{pi.} 4^{po.} 3^{li.}

<i>tes.</i>	<i>pi.</i>	<i>po.</i>	<i>li.</i>
57	5	8	9
43		43	
171		387	12
228		32	3
2451		344	
41		376	12
2492		31	4
		215	
		246	6
		41	0

*Moltiplicazione di un numero denominato
per un altro numero denominato.*

199. Se debbasi moltiplicare un numero denominato per un altro numero denominato , convertiremo prima le parti

denominate dell'unità principale in frazione ordinaria della medesima unità, n.° (193); quindi l'operazione si ridurrà a moltiplicar fra loro due numeri interi accompagnati da frazioni, il che si eseguirà secondo la regola del n.° (136), e poi il risultato a cui si giunge si convertirà in numero denominato dalla stessa specie del moltiplicando. Così, per esempio, se dovessero moltiplicarsi $9\text{li. } 15s. 8d.$ per $7\text{tes. } 4pi. 5po. 2ti.$, l'operazione si riduce a dover moltiplicare $9\frac{188}{240}$ per $7\frac{638}{864}$; e dividendo i due termini della prima frazione per 4, e i due della seconda per 2, dovrà moltiplicarsi $9\frac{47}{60}$ per $7\frac{319}{432}$; il che effettuandosi, il prodotto $\frac{1962341}{25920}$ a cui si giunge sarà della stessa natura del moltiplicando, e perciò ridotto in numero denominato esprimente lire, viene uguale a $75\text{li. } 14s. 1d.\frac{89}{108}$.

200. La moltiplicazione de' numeri denominati potrebbe anche farsi riducendo il moltiplicando ad unità dell'infima specie, e poi queste unità si moltiplicheranno pel moltiplicatore considerato come numero astratto; in tal guisa si avrà per prodotto un numero frazionario, da cui estraendone l'intero, quest'intero esprimerà unità dell'infima specie, e poscia da queste unità si potranno estrarre quelle delle specie superiori (*). Così nell'esempio precedente riducendo le lire i soldi ed i danari tutti a danari, ne risulteranno 2348 danari, i quali dovranno moltiplicarsi per $\frac{6686}{864}$ e si avranno per prodotto $\frac{15698728}{864}$ di danaro, donde estraendo l'intero si

(*) Sebbene con questo metodo fosse un poco lunga la divisione che si fa per estrarre dal numero frazionario a cui si giunge e unità dell'infima specie, pure ciò vien compensato abbastanza dal perchè si evita di far la moltiplicazione de' denominatori del-

otterranno 18169 danari, e poi da questi ricavandone le unità delle specie superiori ne risulteranno infine 75 *lin.* 14 *sol.*

1 d. $\frac{89}{108}$

201. Se occorresse moltiplicare un numero intero per un numero denominato, le unità secondarie di questo numero si convertiranno in frazione ordinaria dell'unità principale; perciò l'operazione si riduce a dover moltiplicare un intero per un intero accompagnato da una frazione; il prodotto poi essendo della medesima natura del moltiplicando, se si voglia trasformare in numero denominato, vi si trasformerà con la regola del n.º (194).

202. Suole anche farsi la moltiplicazione de' numeri denominati col così detto *metodo delle parti aliquote* ovvero *metodo di prendere in parti*, il quale non solo scrive tante volte per giungere più brevemente al risultato, allorchè siasi bene esercitato in questa specie di calcolo; ma è utile ancora per aguzzare l'ingegno de' giovanetti.

Così, per esempio, se un artefice avendo fatto 18 can. 7 p. 5 o. 4 m. di lavoro in un giorno, si domandasse che quantità di lavoro farà in 56 giorni; è chiaro che si arriverà a conoscere la cercata quantità di lavoro moltiplicando quello fatto in un giorno per 56. Per eseguire tal moltiplicazione col metodo di prendere in parti si comincerà dal moltiplicare le 18 canne per 56, ed i prodotti parziali 108 e 90 si lasciano senza sommarli, come si scorge qui a fianco. Poi si passerà a moltiplicare i 7 palmi per 56; ma questa moltiplicazione si farà *per parti*, cioè si divideranno i 7 palmi in più parti ciascuna delle quali sia aliquota dell'unità principale; perciò si ripartiranno i 7 palmi, in 4 palmi più 2 palmi più 1 palmo; e queste parti de' 7 palmi si moltiplicheranno separatamente per 56. Ma, affm di eseguire il prodotto di 4 palmi per 56, si rifletterà che una canna moltiplicata per 56 dando per prodotto 56 canne, 4 palmi che sono la metà di una canna daranno per prodotto la metà di 56 canne, cioè daranno 28 canne. Poi si moltiplicheranno i 2 palmi per 56; ma perchè 2 palmi sono la metà di 4 palmi, si avrà un prodotto uguale alla

		can.	p.	o.	m.
		18	7	5	4
		56			
		108			
		90			
per	4 pal.	28			
	2 pal.	14			
	1 pal.	7			
	4 onc.	2	2	8	
	1 onc.	0	4	8	
	4 miu.	0	3	8	4
		1060	3	0	4

le frazioni, e di ridurre successivamente le unità delle diverse specie ad unità delle specie inferiori.

metà del precedente, cioè si avranno 14 canne. Indi si moltiplicherà 1 palmo per 56, ed è chiaro che dovrà pure averi un prodotto uguale alla metà del precedente, cioè si avranno 7 canne.

Poſcia ſi paſſerà a moltiplicare le 5 once per 56, e qui pure converrà dividere le 5 once in parti che ſieno aliquote dell' unità della ſpecie ſuperiore, cioè del palmo; perciò le ripartiremo in 4 once più 1 oncia, e paſſeremo a moltiplicare prima le 4 once e poi l'oncia per 56. Ma nel moltiplicare le 4 once per 56 riſlettiamo che ſiccome 1 palmo moltiplicato per 56 dà per prodotto 7 canne, 4 once, le quali ſono un terzo del palmo, daranno un terzo di 7 canne, cioè, 2 can. 2 p. 8 o. Poi ſi moltiplicherà 1 oncia per 56, ed è chiaro che ſi avrà un prodotto uguale ad un quarto del precedente, cioè 0 can. 4 p. 8 o.

Infine ſi paſſerà a moltiplicare i 4 minuti per 56; e poichè ſcorgiamo che 4 minuti ſono la quinta parte di 20 minuti, oſſia di 4 once, ne ſegue che per avere il prodotto di 4 minuti per 56 basterà prendere un quinto del prodotto per 4 once; perciò ſi avranno 3 pal. 8 on. 4 mi. Sommando ora tutti i prodotti parziali ottenuti, ſi avrà per prodotto totale 1060 can. 1 pa. 0 on. 4 mi.

203. Sia ora da moltiplicarſi un numero denominato per un altro numero denominato col metodo di prendere in parti. Coſì, per eſempio, ſe voglia conoſcerſi quante canne, palmi, once, e minuti di un certo lavoro farà un arteſice in 56 giorni 15 ore e 40 minuti primi, conoſcendoli che in un giorno fa 18 canne 7 palmi 5 once e 4 minuti del detto lavoro. È manifeſto che per trovare il lavoro che l' arteſice fa in 56 gior. 15 or. 40 m. pr. dovrà moltiplicarſi quello che fa in un giorno pel numero 56 dei giorni, e per le date frazioni del giorno che ſono 15 or. e 40 m. pr. Or poichè abbiamo già fatto nell' eſempio precedente il prodotto del lavoro di un giorno per 56, faremo qui vederè come poſſa farſi il prodotto del detto lavoro per le frazioni del giorno, cioè per 15 or. e 40 m. pr. Per giungervi, convien dividere le ore in parti aliquote del

giorno, ed i minuti primi in parti aliquote dell' ora, eſeguendo le operazioni come ſi vede qui a fianco; e ſi ſcorge facilmente che giova ripartire le 15 ore in 12 ore più 3 ore; pechè 12 ore eſſendo la metà del giorno, ſi avrà un prodotto metà di quello che ſi ottiene moltiplicando il numero propoſto per 1 giorno; e perchè il prodotto per 1 giorno è 18 can. 7 p. 4 m., quello per 12 ore ſarà 9 can. 3 p. 8 o. 4 m. $\frac{1}{2}$. Poi ſi farà la moltiplicazione

	can.	p.	o.	m.	
	18	7	5	4	
	gior. or. mi. primi.				
	56	15	40		
	can.	pa.	on.	mi.	
56 gi.	1060	3	0	4	
12 or.	9	3	8	4 $\frac{1}{2}$	
3 or.	2	2	11	1 $\frac{1}{8}$	
1 or.	0	6	3	3 $\frac{1}{24}$	pr. aus.
30 m.	0	3	1	4 $\frac{1}{48}$	
10 m.	0	1	0	3 $\frac{1}{144}$	
Totale	1072	5	11	2 $\frac{1}{72}$	

per 3 ore, le quali essendo un quarto di 12 ore, si avrà il prodotto prendendo un quarto del precedente, che perciò sarà 2 can. 2 p. 11 o. 1 m. $\frac{1}{8}$.

Indi si farà la moltiplicazione per 40 minuti primi, e gioverà ripartire questi 40 minuti primi in 30 minuti più 10 minuti, perchè 30 minuti essendo la metà di 1 ora, si avrà un prodotto metà di quello che si ottiene moltiplicando il numero proposto per 1 ora, e prendendone poscia la terza parte, si avrà il prodotto per 10 minuti. Or siccome fra i prodotti precedenti non vi è quello per 1 ora, bisognerà prima formarselo, perciò un tal prodotto si chiama *prodotto ausiliare*, e si formerà facilmente prendendo un terzo di quello per 3 ore, quindi ne risulterà per prodotto ausiliare 0 can. 6 p. 3 o. 3 m. $\frac{17}{4}$, del quale prendendone la metà, e poi il terzo della metà, si avranno i prodotti per 30 minuti e per 10 minuti, i quali saranno rispettivamente 0 can. 3 p. 1 o. 4 m. $\frac{17}{8}$, e 0 can. 1 p. 0 o. 3 m. $\frac{17}{16}$. Infine sommando tutti questi prodotti parziali ottenuti, rammentandosi che non si deve tener con quel prodotto ausiliare, si avrà il prodotto totale 1072 can. 5 p. 11 o. 2 m. $\frac{7}{8}$ (*).

A R T. VIII.

Divisione de' numeri denominati.

204. Nella divisione de' numeri denominati contempleremo due casi principali, cioè quello della divisione di un numero denominato per un numero intero, e quello della divisione di un numero denominato per un altro numero denominato.

Divisione di un numero denominato per un numero intero.

205. Sieno, per esempio, 77^{lib.} 9^o 13^{t.} 10^{a.} da dividersi per 24. Cominceremo dal dividere le 77 libbre per 24, in-

(*) Il prodotto ausiliare suole scriversi segnando i numeri che lo compongono con un tratto al di sopra, per indicare che i medesimi non entrano nella somma totale; ma ciò da noi non si è potuto eseguire per difetto di mezzi tipografici.

tavolando l'operazione, come si vede qui di contro, e si avranno per quoziente 3 libbre, ma vi restano 5 libbre da dividersi per 24, le quali, affin di

poter eseguire la divisione, si ridurranno ad once aggiungendo

vi poscia le 9 once, e si avranno

69 once; poi queste 69 once

si divideranno per 24, e si

ottiene per quoziente 2; ma vi restano 21 once da dividersi

per 24, che perciò, affin di poter eseguire la divisione, si

ridurranno a scrupoli moltiplicandole per 30, e si otterranno 630 scrupoli, a quali aggiungendo i 13 scrupoli, si avranno 643 scrupoli. Indi si divideranno questi scrupoli per 24, e si avranno per quoziente 26 scrupoli; ma vi restano 19 scrupoli da dividersi per 24, i quali perciò si convertiranno in acini moltiplicandoli per 20, e ne risulteranno 380 acini a cui aggiungendo i 15 acini, si avranno 395 acini. Infine si divideranno questi 395 acini per 24, e si otterranno per quoziente 16^{ac.} $\frac{11}{24}$. Perciò il quoziente cercato sarà 3^{lib.} 2^{o.} 26^{s.} 16^{a.} $\frac{11}{24}$.

lib.	o.	s.	a.	
77	9	13	15	24
5		643		
12		163		
69		19		
21		20		
30		380		
630		15		
13		395		
		155		
		11		

Divisione di un numero denominato per un altro numero denominato.

206. Dovendosi dividere un numero denominato per un altro numero denominato convertiremo le unità secondarie del numero proposto in frazione ordinaria dell'unità principale, laonde l'operazione si ridurrà a dover dividere un intero accompagnato da una frazione per un altro intero accompagnato da una frazione, il che si eseguirà con la regola del n.º (142); poscia il risultamento che si ottiene se

deve esser numero astratto, giusta l'osservazione che si fece nel n.^o (179), si farà rimanere come si è trovato, ma se deve esser numero concreto si ridurrà a numero denominato della stessa natura del dividendo.

Sieno, per esempio, 23 rotoli 20 once e 15 trappesi da dividersi per 3 staia 5 quarti 4 misurelli (*).

Poichè in questo caso particolare, in cui uno de' numeri proposti dinota rotoli, avviene che il rotolo non si divide in un numero intero di unità della specie immediatamente inferiore, le quali sono le once, gioverà convertire i rotoli in trappesi moltiplicandoli per 1000, e si avranno 23000 trappesi; poi si ridurranno le 2 once anche a trappesi, e vi si aggiungeranno i 15 trappesi, così ne risulteranno 75 trappesi, i quali aggiunti a 23000 trappesi formano 23075 trappesi, ossia rotoli 23,075. Indi le 3 staia, i 5 quarti, ed i 4 misurelli, si ridurranno ad un sol numero astratto che sarà $3\frac{17}{48} = \frac{161}{48}$: ed in-

fine si dividerà 23075 per $\frac{161}{48}$, e si otterranno per quoziente $\frac{1107600}{161}$ di trappeso, da cui estraendone i trappesi, e poscia da questi le once ed i rotoli, si otterranno infine 6^{rot.} 29^{on.} 9^{tr.} $\frac{81}{161}$.

207. *AVVERTIMENTO.* È da notarsi che nella divisione di un numero denominato per un numero denominato, dopo essersi ridotti i numeri proposti a frazione ordinaria dell'unità principale, i loro denominatori avendo sempre de' fattori comuni, ne segue che nell'eseguire la divisione dovendosi rovesciare la frazione che fa da divisore e moltipli-

(*) In quest' esempio potrebbe aversi in mira di voler trovare il peso di uno staio d'olio, conoscendosi che 3^{st.} 5^{qua.} 4^{mi.} pesano 35^{rot.} 2^{on.} 15^{tr.} Difatti, per poco che vi si mediti, si scorge che il peso di uno staio si ottiene dividendo 35^{rot.} 2^{on.} 15^{tr.} per 3^{st.} 5^{q.} 4^{m.} considerato come numero astratto.

carsi per quella che fa da dividendo , i detti fattori diverranno comuni al numeratore ed al denominatore del risultato, e però supprimendosi, ne concludiamo che la divisione de' numeri denominati si effettua più facilmente dalla moltiplicazione.

D'altronde non tralasciamo di osservare che i metodi di eseguire la moltiplicazione e la divisione de' numeri denominati esposti ne' numeri (199,203,206) non si mettono quasi mai in pratica; poichè, come vedremo in breve, nelle questioni aritmetiche, ove occorrebbero tali operazioni, non si fa che ridurre i numeri denominati ad unità dell'infima specie, e si eseguono le operazioni su i numeri che rappresentano queste unità; il risultato poi esprimendo unità dell'infima specie di quella natura che la quistione esige, si estrarranno infine da queste le unità delle specie superiori.

208. Se occorresse dividere un numero intero per un numero denominato, quest'ultimo si trasformerà in numero astratto; quindi l'operazione si riduce a dover dividere un intero per un numero frazionario, il che effettuandosi, il quoziente poi che ne risulta, se deve esser numero astratto, si farà rimanere come si è ottenuto, ma se debb'esser numero denominato, si trasformerà in numero denominato che sia della medesima natura del dividendo.

C A P. II.

DELLE RAGIONI E DELLE PROPORZIONI.

A R T. I.

Definizioni.

209. Due numeri si paragonano fra loro, o per vedere di quanto uno differisce dall'altro, o per vedere uno che quan-

tità contiene dall'altro: il risultato del primo paragone viene espresso dalla differenza fra i due numeri, e quello del secondo paragone viene espresso dal quoziente di uno diviso per l'altro.

Tanto il primo quanto il secondo risultato si chiama *ragione* o *rapporto* fra i due numeri; ma il primo si chiama *ragione* o *rapporto aritmetico*, ed il secondo si chiama *ragione* o *rapporto geometrico*, ed anche più semplicemente *ragione* o *rapporto*. Dunque in breve:

La *ragione aritmetica* fra due numeri è la loro differenza; e la *ragione geometrica* è il quoziente di uno diviso per l'altro. Così, per esempio, la ragione aritmetica di 9 a 4 è $9-4$, ossia 5; e la ragione geometrica di 6 a 2 è $\frac{6}{2}$, ossia 3.

Tanto nella ragione aritmetica quanto nella geometrica i due numeri che si paragonano si chiamano *termini* della ragione, ed in particolare il primo si chiama *antecedente*, ed il secondo *conseguente*. Così, per esempio, nella ragione aritmetica di 9 a 4, 9 è l'antecedente e 4 il conseguente; e nella ragione geometrica di 6 a 2, 6 è l'antecedente e 2 il conseguente.

210. L'eguaglianza di due ragioni aritmetiche si chiama *proporzione aritmetica* ovvero *equidifferenza*. Così, per esempio, la ragione aritmetica di 11 a 9 essendo uguale a quella di 7 a 5, per essere $11-9=7-5$; queste due ragioni uguali costituiscono una proporzione aritmetica, ed i quattro numeri 11, 9, 7, 5 diconsi essere in *proporzione aritmetica* ovvero *aritmeticamente proporzionali*. Dunque quattro numeri sono aritmeticamente proporzionali, allorchè la differenza fra il primo ed il secondo è uguale a quella fra il terzo e il quarto.

Per indicare che i quattro numeri 11, 9, 7, 5 sono in proporzione aritmetica si scrivono nel seguente modo $11 : 9 : 7 : 5$, e si leggono *11 sta a 9 come 7 sta a 5*.

*

211. L'eguaglianza di due ragioni geometriche si chiama *proporzione geometrica*, o semplicemente *proporzione*. Così, per esempio, la ragione di 6 a 2 essendo uguale a quella di 12 a 4, per essere $\frac{6}{2} = \frac{12}{4}$, queste due ragioni uguali costituiscono una proporzione, ed i quattro numeri 6, 2, 12, e 4 diconosi essere in *proporzione* o *proporzionali*. Dunque quattro numeri sono in *proporzione*, allorchè il primo diviso pel secondo pareggia il terzo diviso pel quarto.

Per indicare che i quattro numeri 6, 2, 12, e 4 sono in proporzione, si scrivono nel seguente modo $6 : 2 :: 12 : 4$, e leggonsi *6 sta 2 come 12 sta a 4*.

212 Il primo ed il quarto termine di una proporzione, sia aritmetica, sia geometrica, si chiamano *termini estremi*, ed il secondo e terzo si chiamano *termini medii*, l'ultimo poi si chiama *quarto proporzionale*.

213. Allorchè i termini medii di una proporzione aritmetica o geometrica sono uguali, la proporzione si dice *continua*: e perchè in tal caso i termini diversi riduconsi a tre, quello di mezzo si chiama *medio proporzionale*, e l'ultimo si chiama *terzo proporzionale*. Così, per esempio, la proporzione aritmetica $9 : 7 : 7 : 5$ è continua: e la proporzione geometrica $8 : 4 :: 4 : 2$ è pure continua. Per indicare poi che i tre numeri 9, 7, 5 sono in proporzione aritmetica continua, si scrivono nel seguente modo $\div 9 : 7 : 5$, leggendosi *come 9 sta a 7, così 7 sta a 5*. E per indicare che i tre numeri 8, 4, 2 sono in proporzione geometrica continua si scrivono $\div \div 8 : 4 : 2$, leggendosi *come 8 sta a 4 così 4 sta a 2*.

214. La ragione del conseguente all'antecedente si dice *inversa* o *reciproca* di quella dell'antecedente al conseguente. Così, per esempio, la ragione di 5 a 7 è inversa di quella di 7 a 5.

Da ciò segue che ogn' altra ragione uguale a quella del conseguente all' antecedente sarà pure inversa della ragione dell' antecedente al conseguente. Così, per esempio, la ragione di 3 a 4 essendo inversa di quella di 4 a 3, e la ragione di 6 a 8 essendo uguale a quella di 3 ad 4, la ragione di 6 ad 8 sarà pure inversa di quella di 4 a 3; poichè prendendo l' inversa di 6 ad 8 ne risulta una ragione uguale a quella di 4 ad 3 (*).

Convienè intanto avvertire che la denominazione di ragione *inversa* si usa solamente riguardo alle ragioni geometriche.

215. Quella ragione che risulta dal moltiplicare fra loro più ragioni geometriche, si dice *composta* da queste; e poichè moltiplicando più ragioni, la ragione che ne nasce ha per antecedente il prodotto degli antecedenti, e per conseguente il prodotto de' conseguenti, ne segue che la ragione composta da altre ragioni avrà per antecedente il prodotto de' loro antecedenti e per conseguente il prodotto de' loro conseguenti. Così, per esempio, avendosi le ragioni di 5 a 2, di 3 ad 8, e di 4 a 7, la loro composta sarà quella di $5 \times 3 \times 4$ a $2 \times 8 \times 7$ ossia di 60 a 112.

Per indicare che una ragione è composta da più altre si mettono in parentesi tutte le ragioni componenti, affin di risvegliare l' idea che dal loro prodotto ne nasce la composta. Così la ragione di 6 a 112 essendo composta dalle ragioni di 5 a 2, di 3 a 8, e di 4 a 7, si scriverà $60 : 112 :$

(*) In due ragioni una inversa dell' altra, la frazione che esprime la prima ragione è *inversa* della frazione che esprime la seconda. Così, per esempio, le frazioni $\frac{5}{7}$ e $\frac{7}{5}$ sono una inversa dell' altra; poichè nella prima l' unità è divisa in 7 parti eguali e se ne prendono 5, e nella seconda, al contrario, l' unità è divisa in 5 parti eguali e se ne prendono 7.

(5 : 2) (3 : 8) (4 : 7) , e si leggerà 60 sta a 112 in ragione composta di 5 a 2, di 3 ad 8, e di 4 a 7. .

A R T. II.

Proprietà della ragione e della proporzione aritmetica.

216. *La ragione aritmetica fra due numeri non cambia, se ad essi si aggiunge o toglie il medesimo numero.*

Dim. Difatti, la ragione aritmetica fra due numeri essendo la loro differenza, sappiamo che la differenza fra due numeri non cambia tanto se si aggiunge quanto se si toglie ad essi la medesima quantità. Così, per esempio, la ragione aritmetica di 7 a 5 essendo 2, aggiungendo 4 tanto a 7 quanto a 5, ne vengono i numeri 11 e 9, e la ragione aritmetica fra questi numeri è pure 2. Togliendo poi 4 sì da 7 che da 5, ne vengono i numeri 3 ed 1, e la ragione aritmetica fra questi numeri è anche 2.

217. *Nella proporzione aritmetica la somma dei termini estremi pareggia quella de' termini medii.*

Sieno, per esempio, i quattro numeri 8, 5, 7, e 4 in proporzione aritmetica: dico che si avrà $8+4=5+7$.

Dim. Difatti, essendo i quattro numeri 8, 5, 7, e 4 in proporzione aritmetica, dovrà essere $8-5=7-4$; ed aggiungendo all'una ed all'altra di queste grandezze uguali la somma de' conseguenti, ne verrà $5+4+8-5=5+4+7-4$; ma poichè $5-5=0$, e $4-4=0$, ne risulterà $4+8=5+7$; e quindi la somma de' termini estremi è uguale a quella de' termini medii.

Se gli antecedenti fossero minori de' conseguenti, come avviene nella proporzione $6 . 10 : 5 . 9$; allora, poichè $10-6=9-5$, aggiungendo a queste due grandezze uguali la somma degli antecedenti, ne verrà $6+5+10-6=6+5$

+9=5, che si riduce a $5+10=6+9$; laonde la somma de' termini estremi pareggia quella de' termini medii.

È chiaro poi che quando la proporzione è continua la somma degli estremi viene uguale al doppio del termine medio. Così, per esempio, nella proporzione aritmetica $7 : 5 : 3$, si avrà $7+3=5+5=10$.

218. Se quattro numeri sono tali, che la somma degli estremi pareggia quella de' medii, i quattro numeri saranno in proporzione aritmetica.

Sieno, per esempio, i quattro numeri 11, 8, 5, 2, tali che si abbia $11+2=8+5$: dico che sarà $11 : 8 : 5 : 2$.

Dim. Difatti, essendo per ipotesi $11+2=8+5$, togliendo da queste due grandezze uguali la somma di quei numeri che abbiamo messi come conseguenti, ne verrà $11+2-8-2=5+5-8-2$, ossia $11-8=5-2$; e quindi $11 : 8 : 5 : 2$.

Quando poi tre numeri sono tali che la somma de' termini estremi pareggia il doppio del termine medio, essi allora formano una proporzione aritmetica continua. Così, per esempio, poichè rispetto a' tre numeri 10, 7, 4 si verifica che $10+4=7+7$, i tre numeri saranno in proporzione aritmetica continua, cioè si avrà $\div 10 : 7 : 4$.

219. Il teorema enunciato nel numero precedente può anche enunciarsi indipendentemente dall'ordine come sono disposti i quattro numeri, dicendosi: Se la somma di due numeri pareggia quella di due altri numeri, i quattro numeri costituiscono una proporzione aritmetica, potendosi prendere indifferentemente i due primi per termini estremi, ed i due secondi per termini medii. In tal guisa potranno farsi otto combinazioni differenti, e si avranno otto proporzioni aritmetiche. Così, per esempio, avendosi $5+3=6+2$, prendendo 5 e 3 per termini estremi, si avranno le quattro proporzioni

$$\begin{array}{ll} 5 : 6 : 2 : 3, & 3 : 6 : 2 : 5, \\ 5 : 2 : 6 : 3, & 3 : 2 : 6 : 5; \end{array}$$

e prendendo 5 e 3 per termini medii, si avranno le quattro proporzioni

$$\begin{array}{ll} 6 : 5 : 3 : 2 & 2 : 5 : 3 : 6, \\ 6 : 3 : 5 : 2 & 2 : 3 : 5 : 6. \end{array}$$

L'esistenza di queste otto proporzioni si dimostra sempre con togliere dalle due grandezze uguali per ipotesi la somma de' termini che si sono presi come conseguenti.

220. *Allorchè si conoscono tre termini di una proporzione aritmetica si può trovare il quarto, e questo, se è termine estremo, si trova sommando i medii e togliendo dalla somma l'altro estremo, e se è termine medio si trova sommando gli estremi e togliendo dalla somma l'altro medio.*

Sia, per esempio, la proporzione aritmetica $8 : 5 : 7 : x$, ove è incognito un termine estremo che abbiamo indicato con x : dico che sarà $x=5+7-8=4$.

Dim. Difatti, poichè i quattro numeri 8, 5, 7, ed x sono in proporzione aritmetica, si avrà $8+x=5+7$; e togliendo dall'una e dall'altra di queste grandezze uguali l'estremo cognito, che è 8, ne verrà $8+x-8=5+7-8$, ossia $x=5+7-8=4$. Dunque il termine estremo x si ottiene sommando i medii 5 e 7, e togliendo dalla somma 12 l'altro estremo 8.

Se poi il termine incognito fosse uno de' medii, come avviene nella proporzione $6 : x : 3 : 7$, si avrà similmente $x+3=6+7$; e togliendo dall'una e dall'altra di queste grandezze uguali l'altro termine medio 3, ne verrà $x+3-3=6+7-3$, ossia $x=6+7-3=10$.

Nella proporzione aritmetica continua la somma degli estremi essendo uguale al doppio del termine medio, *un termine estremo si trova raddoppiando il medio e togliendone l'altro estremo, ed il medio si ottiene sommando gli estremi, e prendendo la metà della somma.*

Proprietà della ragione e della proporzione geometrica.

221. Una ragione non si altera tanto se si moltiplicano quanto se si dividono i suoi due termini per lo stesso numero.

Perchè la ragione essendo eguale al quoziente che si ottiene col dividere l'antecedente pel conseguente, sappiamo che il quoziente di una divisione non cambia se si moltiplicano o dividono il dividendo ed il divisore per lo stesso numero.

222. In ogni proporzione il prodotto de' termini estremi pareggia quello de' termini medii.

Sia, per esempio, la proporzione $5 : 3 :: 10 : 6$. Dico che sarà $5 \times 6 = 3 \times 10$.

Dim. In effetti, i quattro numeri 5, 3, 10, e 6 essendo in proporzione, si avrà $\frac{5}{3} = \frac{10}{6}$; e moltiplicando queste due frazioni pel prodotto de' conseguenti, ne viene $\frac{5 \times 3 \times 6}{3} = \frac{10 \times 3 \times 6}{6}$; e supprimendo il fattore 3 comune a' due termini della prima frazione, ed il fattore 6 comune a' due termini della seconda, ne risulta $5 \times 6 = 10 \times 3$; onde si vede che il prodotto de' termini estremi pareggia quello de' termini medii.

Nella proporzione continua il prodotto de' termini estremi venendo uguale al termine medio moltiplicato per se stesso, ed il prodotto di un numero per se stesso chiamandosi quadrato di esso numero, ne segue che il prodotto de' termini estremi pareggia il quadrato del termine medio.

223. Se quattro numeri sono tali che il prodotto degli estremi pareggia quello de' medii, i quattro numeri saranno in proporzione.

Sieno, per esempio, i quattro numeri 10, 8, 5, 4 tali che abbiasi $10 \times 4 = 8 \times 5$: dico che essi saranno in proporzione, e si avrà $10 : 8 :: 5 : 4$.

Dim. Poichè, essendo per ipotesi $10 \times 4 = 8 \times 5$, dividendo queste due grandezze uguali pel prodotto di que' numeri che si sono messi come conseguenti, si avrà $\frac{10 \times 4}{8 \times 4} = \frac{8 \times 5}{8 \times 4}$, e supprimendo i fattori comuni a' termini di ciascuna frazione, ne verrà $\frac{10}{8} = \frac{5}{4}$; e però $10 : 8 :: 5 : 4$.

Quando poi tre numeri sono tali che la somma de' termini estremi pareggia il quadrato del termine medio, i tre numeri formano una proporzione continua. Così, per esempio, i tre numeri 8, 4, 2, essendo tali che $8 \times 2 = 4 \times 4$, essi sono in proporzione continua, cioè si avrà $8 : 4 :: 4 : 2$.

224. Qui pure come nel numero (219) possiamo enunciare il teorema del numero precedente nel seguente modo : *Se il prodotto di due numeri pareggia quello di due altri numeri, i quattro numeri formano una proporzione, potendosi prendere indifferentemente i due fattori di un prodotto come termini estremi, ed i due fattori dell' altro come termini medii.*

Così, per esempio, essendo $10 \times 4 = 8 \times 5$, prendendo 10 e 4 per termini estremi, si avranno le quattro proporzioni

$$\begin{array}{ll} 10 : 8 :: 5 : 4, & 4 : 8 :: 5 : 10, \\ 10 : 5 :: 8 : 4, & 4 : 5 :: 8 : 10; \end{array}$$

e prendendo 10 e 4 per termini medii, si avranno le quattro proporzioni

$$\begin{array}{ll} 8 : 10 :: 4 : 5, & 5 : 10 :: 4 : 8, \\ 8 : 4 :: 10 : 5, & 5 : 4 :: 10 : 8. \end{array}$$

L'esistenza di queste otto proporzioni si dimostra sempre con dividere le due grandezze uguali per ipotesi pel prodotto di que' numeri che si prendono come conseguenti.

225. *Allorchè si conoscono tre termini di una proporzione si può trovare il quarto, e questo, se è termine estremo, si trova moltiplicando i medii e dividendo il prodotto per l' altro*

estremo, e se è termine medio si ottiene moltiplicando gli estremi, e dividendo il prodotto per l'altro medio.

Sia, per esempio, la proporzione $10 : 8 : 5 : x$ nella quale è incognito il quarto termine che abbiamo indicato con x .

Dico che si avrà $x = \frac{5 \times 8}{10} = \frac{40}{10} = 4$.

Dim. In effetti, i quattro numeri $10, 8, 5, x$ essendo in proporzione, il prodotto de' termini estremi sarà uguale a quello de' termini medii; quindi si avrà $10 \times x = 8 \times 5$; e dividendo l'una e l'altra di queste grandezze uguali per l'estremo cognito, che è 10 , ne verrà $x = \frac{8 \times 5}{10} = \frac{40}{10} = 4$. Se poi il

termine incognito fosse uno de' medii, come avviene nella proporzione $10 : x : 5 : 4$; allora, essendo $10 \times 4 = x \times 5$, dividendo queste due grandezze uguali per l'altro termine medio, ne verrà $x = \frac{10 \times 4}{5} = \frac{40}{5} = 8$.

Nella proporzione continua il prodotto de' termini estremi essendo uguale al quadrato del termine medio, *un termine estremo si trova facendo il quadrato del medio e dividendolo per l'altro estremo, ed il termine medio si trova facendo il prodotto degli estremi, e prendendone la radice quadrata*, chiamandosi *radice quadrata* di un numero quel numero che moltiplicato per se stesso produce il numero proposto (*).

226. Sogliono farsi alcuni cambiamenti di posto ne' termini di una proporzione tali che ne risulta una nuova proporzione. A due di questi cambiamenti che frequentemente si presentano si sono dati i nomi particolari d'*invertendo* e *permutando*.

L'*invertendo* avviene allorchè in una proporzione i conseguenti si fanno passare nel posto de' rispettivi antecedenti, e questi in quello de' rispettivi conseguenti.

(*) Vedremo nella terza parte di questi elementi come trovare la radice quadrata di un dato numero.

Il *permutando* avviene quando l'antecedente della prima ragione si paragona a quello della seconda, ed il conseguente della prima a quello della seconda.

227. Sogliono inoltre combinarsi in varii modi i termini di una proporzione per mezzo di somma, sottrazione, moltiplicazione, e divisione, tal che ne risulta una nuova proporzione. A due di queste combinazioni che più spesso occorrono si danno i nomi particolari di *componendo* e *dividendo*.

Il *componendo* avviene allorchè la somma dell'antecedente e conseguente di ciascun rapporto si paragona al medesimo conseguente.

Il *dividendo* avviene allorchè la differenza fra l'antecedente e conseguente di ciascun rapporto si paragona al rispettivo conseguente (*).

Passiamo ora a dimostrare successivamente come col combinare in certo modo i termini di una proporzione ne risulti una nuova proporzione.

228. *Se quattro numeri sono in proporzione invertendo o permutando saranno ancora in proporzione.*

Sieno, per esempio, in proporzione i quattro numeri 14, 8, 7, 4: dico che invertendo si avrà $8 : 14 :: 4 : 7$; e permutando si avrà $14 : 7 :: 8 : 4$.

Dim. Difatti, essendo per ipotesi $14 : 8 :: 7 : 4$, si avrà $14 \times 4 = 8 \times 7$; adunque i quattro numeri 8, 14, 7, 4 che risultano dal fare l'invertendo sono tali che il prodotto de' termini estremi pareggia quello de' medii; perciò essi saranno in proporzione, e quindi si avrà $8 : 14 :: 4 : 7$.

Così pure i quattro numeri 14, 7, 8, 4 che risultano dal

(*) Le diverse maniere di combinare i termini di una proporzione in modo da risultarne una nuova proporzione dicevansi dagli antichi *modi di argomentare in proporzione*.

fare il permutando , essendo tali che il prodotto de' termini estremi pareggia quello de' medii , saranno in proporzione , e però si avrà $14 : 7 :: 8 : 4$.

Convienè intanto avvertire che, trattandosi di numeri concreti, il permutando non può farsi se i quattro termini della proporzione non rappresentano quantità omogenee. Così , per esempio , nella proporzione $14 \text{ palmi} : 8 \text{ palmi} :: 7 \text{ libbre} : 4 \text{ libbre}$, non può farsi il permutando ; perchè i palmi non sono paragonabili alle libbre.

229. *Se quattro numeri sono in proporzione, componendo o dividendo saranno pure in proporzione.*

Sieno , per esempio , in proporzione i quattro numeri 15, 6, 5, 2 : dico che componendo si avrà $15+6 : 6 :: 5+2 : 2$; e dividendo si avrà $15-6 : 6 :: 5-2 : 2$.

Dim. In effetti , per essere i quattro numeri 15, 6, 5, 2 in proporzione , si ha $\frac{15}{6} = \frac{5}{2}$; ed aggiungendo l' unità al-

l'una ed all'altra di queste grandezze uguali, ne verrà

$\frac{15}{6} + 1 = \frac{5}{2} + 1$; e scrivendo la prima unità sotto forma fra-

zionaria che abbia per denominatore 6 , e la seconda sotto

forma frazionaria che abbia per denominatore 2 , ne verrà

$\frac{15}{6} + \frac{6}{6} = \frac{5}{2} + \frac{2}{2}$. Or poichè la somma delle due prime fra-

zioni è $\frac{15 \times 6}{6}$, e la somma delle due seconde è $\frac{5 \times 2}{2}$, ne

verrà infine $\frac{15 \times 6}{6} = \frac{5+2}{2}$; cioè $15+6 : 6 :: 5+2 : 2$.

Togliendo poi l'unità dalle medesime grandezze, ne verrà

$\frac{15}{6} - 1 = \frac{5}{2} - 1$, ossia $\frac{15}{6} - \frac{6}{6} = \frac{5}{2} - \frac{2}{2}$, ovvero $\frac{15-6}{6} = \frac{5-2}{2}$;

e però $15-6 : 6 :: 5-2 : 2$. Se poi la data proporzione avesse gli antecedenti minori de'rispettivi conseguenti, come av-

viene nella proporzione $3 : 8 :: 9 : 24$, allora si opererà al contrario, cioè le due frazioni uguali $\frac{3}{8}$ e $\frac{9}{24}$ si toglieranno dall'unità, e si avrà $1 - \frac{3}{8} = 21 - \frac{9}{24}$, ossia $\frac{8}{8} - \frac{3}{8} = \frac{24}{24} - \frac{9}{24}$, ovvero $\frac{8-3}{8} = \frac{24-9}{24}$; e quindi $8-3 : 8 :: 24-9 : 24$.

230. *Se in una proporzione si moltiplicano o si dividono gli antecedenti o i conseguenti per lo stesso numero, ne risulta una nuova proporzione.*

Perchè ciò equivale a moltiplicare o a dividere per lo stesso numero le due frazioni uguali, che esprimono i due rapporti della proporzione.

231. *In una proporzione la somma o differenza degli antecedenti sta alla somma o differenza de' conseguenti, come un antecedente al suo conseguente.*

Sia, per esempio, la proporzione $12 : 3 :: 8 : 2$. Dico che si avrà $12+8 : 3+2 :: 12 : 3$.

Dim. Difatti, essendo $12 : 3 :: 8 : 2$, permutando ne verrà $12 : 8 :: 3 : 2$; e componendo, o dividendo, si avrà $12+8 : 8 :: 3+2 : 2$; e di nuovo permutando, ne verrà $12+8 : 3+2 :: 8 : 2$.

232. *In una serie di rapporti uguali, la somma degli antecedenti starà a quella de' conseguenti come un antecedente sta al suo conseguente.*

Sieno, per esempio, i rapporti uguali $12 : 3$, $8 : 2$, $20 : 5$. Dico che si avrà $12+8+20 : 3+2+5 :: 12 : 3$.

Dim. In effetti, essendo $12 : 3 :: 8 : 2$, pel teorema precedente, si avrà $12+8 : 3+2 :: 8 : 2$; e sostituendo alla ragione di $8 : 2$ quella di $20 : 5$ che l'è uguale, si avrà $12+8 : 3+2 :: 20 : 5$; laonde, per lo stesso teorema, ne verrà $12+8+20 : 3+2+5 :: 20 : 5$, ovvero $:: 8 : 2$.

Qui si vede che i termini delle proposte ragioni debbono considerarsi tutti come astratti, altrimenti se i medesimi non avessero a riguardarsi come tali, allora si richiede che le quantità da essi rappresentate sieno tutte omogenee.

233. *Moltiplicare due proporzioni per ordine significa moltiplicare primo termine per primo termine, secondo per secondo, terzo per terzo, e quarto per quarto. Così, per esempio, avendosi le due proporzioni $8 : 3 :: 14 : 9$, e $5 : 4 :: 10 : 2$, moltiplicandole per ordine, ne vengono i quattro prodotti 8×5 , 3×4 , 14×10 , 9×2 . Ciò premesso.*

Se si hanno più proporzioni, moltiplicandole per ordine ne risulta una nuova proporzione.

Sieno primieramente le due proporzioni $8 : 3 :: 14 : 9$, e $5 : 4 :: 10 : 2$.

Dico che moltiplicandole per ordine si avrà $8 \times 5 : 3 \times 4 :: 14 \times 10 : 9 \times 2$.

Dim. Difatti, scrivendo i rapporti delle proporzioni sotto forma frazionaria, l'operazione si riduce a moltiplicare rispettivamente le frazioni uguali $\frac{8}{3}$ e $\frac{14}{9}$ per le frazioni uguali $\frac{5}{4}$ e $\frac{10}{2}$; quindi ne risultano le frazioni uguali $\frac{8 \times 5}{3 \times 4}$ e $\frac{14 \times 10}{9 \times 2}$, e però si avrà $8 \times 5 : 3 \times 4 :: 14 \times 10 : 9 \times 2$.

È facile poi vedere come questa dimostrazione possa estendersi ad un numero qualunque di proporzioni.

C A P. III.

APPLICAZIONE DELL' ARITMETICA ALLA RISOLUZIONE DI DIVERSI PROBLEMI.

A R T. I.

234. L' Aritmetica si applica alla risoluzione di diverse quistioni, le quali suppongono la conoscenza de' quattro problemi fondamentali, non che quella del modo come trovare il quarto termine di una proporzione. Le più comuni fra queste questioni sogliono distinguersi in più classi dette anche *regole*, perchè si danno delle regole particolari onde poter risolvere tutte le quistioni che si comprendono in ciascuna classe. Quelle di cui noi tratteremo sono le così dette *regola del tre*, *regola di società*, *regola di alligazione*, e *regola congiunta*.

A R T. II.

Della regola del tre.

235. Si chiama *regola del tre* quella che insegna a risolvere i problemi ne' quali la cosa ignota dipende da tre termini di una proporzione. Essa si distingue in *semplice* e

composta. Si dice *semplice*, allorchè nell' enunciato del problema entrano due sole ragioni. Si dice *composta*, allorchè nell' enunciato del problema entrano più di due ragioni, in modo che la ragione della cosa cercata alla data della stessa specie si compone da tutte le altre ragioni le quali si contengono nel medesimo enunciato.

Della regola del tre semplice.

136. Nella regola del tre semplice vi entrano quattro grandezze, tre delle quali sono note ad una incognita, e di queste grandezze, due sono della stessa specie, e due altre sono pure della medesima specie, che può essere diversa dalla specie delle prime due. Oltracciò, le prime due sono nella stessa ragione delle due seconde, ed a ciascun termine della prima ragione corrisponde un termine della seconda.

Così, per esempio, se un corriere abbia percorso 8 miglia in 3 ore, e voglia conoscersi in 20 ore quante miglia percorrerà: in questo problema vi entrano quattro grandezze, cioè 3 ore, 20 ore, 8 miglia, ed il numero incognito delle miglia che si percorrono in 20 ore. Le prime e le seconde ore sono della stessa specie, e le prime e le seconde miglia sono pure della medesima specie, ma di specie diversa da quella delle prime due. Dippiù, alle prime ore, che sono 3, corrispondono le 8 miglia che si percorrono in tal tempo; ed alle seconde ore, che sono 20, corrispondono le miglia incognite che si percorrono in 20 ore. Ciò premesso:

Allorquando nella regola del tre semplice avviene che la ragione di una grandezza all' altra della medesima specie è uguale a quella della grandezza corrispondente alla prima alla grandezza corrispondente alla seconda, la regola si chiama *diretta*.

Quando poi la ragione di una grandezza all' altra della

medesima specie è uguale alla ragione inversa della grandezza corrispondente alla prima alla grandezza corrispondente alla seconda, la regola si chiama *inversa*.

237. *Per risolvere un problema della regola del tre semplice si scriveranno le quantità della stessa specie l'una sotto l'altra, in modo che quelle corrispondenti sieno in una medesima linea orizzontale. Poi si vedrà se la ragione di una grandezza all'altra della stessa specie sia diretta o inversa di quella della grandezza corrispondente alla prima alla grandezza corrispondente alla seconda.*

Se è diretta, si stabilirà la proporzione: Una grandezza sta all'altra della medesima specie, come quella corrispondente alla prima sta a quella corrispondente alla seconda.

Se è inversa, la proporzione sarà: Una grandezza sta all'altra della medesima specie, come quella corrispondente alla seconda sta a quella corrispondente alla prima.

Sia, per esempio, il problema del numero precedente, in cui si vuol conoscere in 20 ore quante miglia farà un corriere, il quale in 3 ore ha fatto 8 miglia?

Indicando con x il numero incognito delle miglia, e scrivendo le grandezze che entrano nell'enunciato del problema, come si vede qui di contro; scorgiamo primieramente che, più sono le ore, più miglia si percorrono; e scorgiamo dippiù che, 3 8
se le prime ore fossero il doppio, il triplo, ec. 20 x
delle seconde ore, anche le miglia corrispondenti alle prime ore sarebbero il doppio, il triplo, ec. delle miglia corrispondenti alle seconde ore; e se le prime ore fossero la metà, la terza parte, ec. delle seconde ore, anche le miglia corrispondenti alle prime ore sarebbero la metà, la terza parte, ec. delle miglia corrispondenti alle seconde ore; perciò la ragione delle prime alle seconde ore è uguale a quella delle prime alle seconde miglia; dunque

la regola è diretta, e si avrà la proporzione $3 : 20 :: 8 : x$;
dalla quale, n.° (225), si ricava $x = \frac{8 \times 20}{3} = \frac{160}{3} = 53 \frac{1}{3}$.

Dunque in 20 ore il corriere percorrerebbe miglia $53 \frac{1}{3}$.

238. Abbiassi per secondo esempio il seguente problema.

Se per vestire un Regimento di soldati di un panno largo 5 palmi vi è stato bisogno di 3560 canne dello stesso ; dovendosi poi vestire di un panno largo palmi $3 \frac{1}{2}$, quante canne di panno vi bisognarono ?

Applicando a questo problema lo stesso ragionamento fatto nel precedente, osserviamo che più largo è il panno, meno lunghezza si richiede per formare i vestimenti, e scorgiamo dippiù che se la larghezza del primo panno fosse doppia, tripla, ec. di quella del secondo, la lunghezza del primo dovrebb' essere la metà, la terza parte, ec. di quella del secondo, e viceversa. Qui dunque le ragione della prima alla seconda larghezza è uguale alla ragione della seconda alla prima lunghezza ; e però la regola del tre è inversa, laonde si avrà la seguente proporzione $3 \frac{1}{2} : 5 :: 3560 : x$, da cui si trae $x = \frac{3560 \times 5}{3 \frac{1}{2}} = 5085 \frac{2}{5}$.

239. Abbiassi per terzo esempio il seguente problema.

Se 8 libbre, 5 oncie, e 20 trappesi di un gallone d' oro si sono pagati 250 ducati e 60 grani ; si domanda quanto costerebbero 3 libbre e 10 oncie del medesimo gallone ?

Applicando a questo esempio lo stesso ragionamento tenuto negli esempi precedenti, troveremo che esso appartiene alla regola del tre diretta, e la proporzione che dà il valore dell'incognita sarà la seguente

$$8\text{lib. } 5\text{on. } 20\text{tr.} : 3\text{lib. } 10\text{on.} :: 250\text{duc. } 60\text{gr.} : x.$$

Ma qui, ed in tutti i casi consimili, bisogna avvertire che tanto nella prima, quanto nella seconda ragione, riesce più comodo ridurre i numeri denominati in unità della stessa

specie, ma della specie più piccola che trovasi in uno de' termini della rispettiva ragione. Così nel nostro caso conviene convertire le libbre e le oncie in trappesi ed i ducati in grani, ed allora il termine incognito esprimerà grani, cioè esprimerà unità uguali a quelle dell'altro termine della stessa ragione. Ciò fatto, la proporzione di sopra riducesi alla seguente $5050 : 1380 :: 23060 : x$; d'onde si ricava

$$x = \frac{23060 \times 1380}{3050} = \frac{23060 \times 138}{305} = \frac{4612 \times 138}{61}$$

$= 10433 \text{ gr. } \frac{43}{61}$, cioè uguale a ducati 104,34.

240. Aggiungiamo per esercizio de' giovanetti i due seguenti esempi.

1.° *Se una fontana in 2 ore e 24 minuti ha riempito 9 botti di acqua; si domanda in quanto tempo si riempiranno 34 botti e 5 barili?*

Qui la regola è diretta, e l'incognita si troverà uguale ad 9 ore 10 mi. pr. 40 mi. sec.

2.° *Un giardino apprezzato al 4 per 100 si è pagato 3000 ducati; dovendosi poi rivendere al 5 $\frac{1}{2}$ per 100, si domanda quale sarà il prezzo del giardino?*

Qui conviene avvertire che, al 4 per 100, significa che per ogni 4 ducati di frutto annuale prodotto dal giardino, si pagano 100 ducati. Lo stesso si dica del 5 $\frac{1}{2}$ per 100.

In questo problema la regola del tre è inversa, e l'incognita si troverà uguale a 2181,81 $\frac{9}{11}$.

Regola del tre composta.

241. Prima d'intraprendere la soluzione de' problemi appartenenti a questa regola, facciamo osservare che, se una quantità dipende da un'altra in modo che la seconda divenendo doppia, tripla, ec. anche la prima diviene doppia, tripla, ec., ovvero la seconda divenendo metà, terza parte, ec., anche la prima diviene metà, terza parte, ec.; si

dice che la prima varia in ragion *diretta* della seconda. Se poi avvenisse il contrario, cioè, se la seconda divenendo doppia, tripla, ec., la prima divenisse metà, terza parte, ec., ovvero la seconda divenendo metà, terza parte, ec., la prima divenisse doppia, tripla ec., si dice che la prima varia in ragione *inversa* della seconda (*).

Così, per esempio, il prezzo di un canestro di frutti è in ragion diretta del peso. Il tempo che un corriere impiega per andare da un paese ad un altro, è in ragione inversa del numero delle miglia che fa in ogn' ora. Il lavoro fatto

(*) Queste idee premesse, cade opportuno far notare che, sebbene avessimo data la definizione della regola del tre nel numero (235), il carattere proprio di questa regola è contenuto nella seguente definizione.

Si chiama regola del tre, quella che insegna a risolvere i problemi in cui la cosa cercata dipende da una o più grandezze, al variar delle quali essa varia in ragion diretta o inversa delle stesse. Si distingue poi in *semplice* e *composta* secondo che le grandezze da cui la cosa cercata dipende sono una, o più.

Ne' problemi appartenenti a questa regola si conosce il valore della grandezza dipendente, il quale corrisponde a dati valori di quelle da cui dipende, e si vuol trovare il valore che essa acquista relativamente ad altri valori che si danno alle grandezze delle quali dipende.

È notevole che questa sola definizione presta all'aritmetico pratico il carattere come conoscere che il problema appartenga alla regola del tre composta; poichè questi, stando alla definizione del n.º (135), non saprebbe vedere nell'enunciazione del problema come la ragione della cosa cercata alla data della stessa specie sia composta da tutte le altre le quali si contengono nel medesimo enunciato. Se poi si volesse stare ad altre definizioni, come, per esempio, a quella in cui si dice che nella regola del tre composta le grandezze date sono tre, cinque, sette, ec. le quistioni potrebbero confondersi con altre che non appartengono alla regola del tre.

da più operai è in ragion diretta del numero degli operai , ed è pure in ragion diretta del numero de' giorni che travagliano. Il tempo che impiegano più persone a fare un certo lavoro è in ragion inversa del numero delle persone, ed è in ragion diretta della quantità di lavoro che debbon fare.

242. Per risolvere un problema appartenente a questa regola bisogna operare del seguente modo.

Si scrivono le grandezze della medesima specie l'una sotto l'altra in modo che quelle corrispondenti sieno situate in una medesima linea orizzontale.

Poi si esaminano successivamente tutte le ragioni contenute nell'enunciato del problema se sono dirette o inverse di quella della cosa cercata alla data della medesima specie ; e questo esame si farà supponendo che i termini della linea ove si trova l'incognita sieno uguali a quelli dell'altra linea, meno il termine di quella ragione che si esamina ; e si scambieranno di posto i termini delle ragioni inverse.

Indi si stabilirà la proporzione: Cosa cercata sta alla data della medesima specie, come il prodotto di tutti i numeri che sono nella linea corrispondente alla cosa cercata , al prodotto di tutti gli altri numeri che sono nella linea corrispondente alla cosa data.

Così , per esempio , se per costruire un muro avente 4 palmi di grossezza e 75 di lunghezza in 24 giorni , sono bisognati 20 operai ; si domanda quanti operai bisogneranno per costruire in 15 giorni un muro avente 5 palmi di grossezza e 90 di larghezza ?

Indicando con x il numero degli operai che si cerca , e scrivendo tutte le quantità che entrano nell'enunciato del problema, come si vede qui a fianco. Cominciamo dall'osservare

	<i>gros.</i>	<i>lung.</i>	<i>gior.</i>	<i>oper.</i>
che , restando la stessa la lunghezza ed il numero di giorni , più grande è la grossezza del muro , più operai si richieggono	4 ,	75 ,	24 ,	20
	5 ,	90 ,	15 ,	x

a costruirlo : dunque la ragione delle grossezze è diretta a quella degli operai. Poi si esamina la ragione delle lunghezze, e si osserva che, restando la stessa la grossezza, più lungo è il muro, più operai ci vogliono per costruirlo : dunque la ragione delle lunghezze è diretta di quella degli operai. Indi si esamina la ragione de' giorni, e si dirà : restando la stessa la grossezza e lunghezza del muro, più sono i giorni, meno è il numero degli operai che ci vogliono per costruirlo : dunque la ragione de' giorni è inversa di quella degli operai, e però si scambieranno di posto i suoi termini. Dunque infine le grandezze dell'enunciato del problema si

troveranno scritte in due linee orizzontali come si vede qui di contro ; e perciò si stabilirà la seguente proporzione

$x : 20 :: 5 \times 90 \times 24 : 4 \times 75 \times 15$, da cui si ricava

$$x = \frac{20 \times 5 \times 90 \times 24}{4 \times 75 \times 15}, \text{ e supprimendo i fattori comuni al}$$

numeratore ed al denominatore, si otterrà $x = 48$.

Dim. Dopo che si sono scritte le grandezze contenute nell'enunciato del problema come si vede qui a fianco, cominciamo dall'osservare che, restando la stessa la lunghezza ed il numero de' giorni corrispondenti a 20 operai, più grosso è il muro, più operai

si richieggono a costruirlo; e se la grossezza divenisse doppia, tripla, ec., anche gli operai diverranno il doppio, il triplo, ec.; e viceversa; adunque le grossezze sono in ragione diretta degli operai; e perciò la prima grossezza essendo 4, e la seconda 5, ed i primi operai essendo 20, ed i secondi indicandoli con z , si avrà la proporzione $4 : 5 :: 20 : z$, da

$$\text{da cui si ricava } z = \frac{20 \times 5}{4}.$$

Or poichè z rappresenta un numero di operai che hanno costruito un muro avente 5 palmi di grossezza, e 75 di lunghezza in 24 giorni, scorgiamo che, restando la stessa la grossezza ed il numero de'giorni corrispondente a z operai, più lungo è il muro, più operai si richieggono a costruirlo, e se la lunghezza fosse doppia, tripla, ec., anche gli operai dovranno essere il doppio, il triplo, ec.; e viceversa: adunque le lunghezze sono in ragione diretta degli operai. Perciò la prima lunghezza essendo 75, e la seconda 90, ed i primi operai essendo z , ossia $\frac{20 \times 5}{4}$, ed i secondi indicandoli con

$$y, \text{ si avrà la proporzione } 75 : 90 :: \frac{20 \times 5}{4} : y, \text{ da cui si trae}$$

$$y = \frac{20 \times 5 \times 90}{4 \times 75}.$$

Or poichè y rappresenta un numero di operai i quali hanno costruito un muro 5 palmi largo e 90 lungo in 24 giorni, scorgiamo che, rimanendo la stessa la grossezza e la lunghezza corrispondente ad y operai, se il numero de'giorni divenisse doppio, triplo, ec. il numero degli operai che richieggonsi per costruire il muro sarà metà, terza parte, ec.; e viceversa; adunque i giorni sono in ragione inversa degli operai, che perciò i primi giorni essendo 24, ed i secondi 15, ed i primi operai essendo y , ossia $\frac{20 \times 5 \times 90}{4 \times 75}$,

ed i secondi operai avendoli indicati da principio con x , si avrà la proporzione $15 : 24 :: \frac{20 \times 5 \times 90}{4 \times 75} : x$, da cui si deduce $x = \frac{20 \times 5 \times 90 \times 24}{4 \times 75 \times 15}$.

Or se si divide x per 20, cioè se si trova la ragione fra la cosa cercata e la data della stessa specie, si otterrà $\frac{x}{20} = \frac{5 \times 90 \times 24}{4 \times 75 \times 15}$, d'onde si rileva che essa è composta da

tutte le altre ragioni dirette ed inverse le quali si contengono nell' enunciato del problema (*).

Da qui si desume che l'incognita nella regola del tre composta può trovarsi con una sola proporzione: poichè esaminando ad una ad una tutte le ragioni contenute nell' enunciato del problema, se sono dirette o inverse di quella della cosa cercata alla data della stessa specie; dopo essersi scambiati di posto i termini delle ragioni inverse, si stabilirà la proporzione: *cosa cercata sta alla data della medesima specie, come il prodotto di tutti i numeri contenuti nella linea corrispondente alla cosa cercata, sta al prodotto di tutti gli altri numeri contenuti nella linea corrispondente alla cosa data* (**).

(*) Convien notare che le ragioni inverse di quella della cosa cercata alla data della stessa specie, entrano nella composizione di questa ragione con i termini scambiati di posto.

(**) È osservabile che i problemi della regola del tre composta vanno compresi sotto il seguente enunciato generale: *Se una quantità dipende da più altre in modo che facendosi variare successivamente ciascuna di queste, la detta quantità varia in ragion diretta o inversa delle stesse; il valor primitivo della quantità starà al secondo valore che essa prende, in ragion composta dalle ragioni de' primi valori delle quantità dalle quali dipende a' corrispondenti valori nuovi delle stesse quantità, dovendosi scambiare di posto i termini nelle ragioni inverse.*

Eccone la dimostrazione generale applicabile eziandio alle quantità considerate puramente come continue.

Denotiamo con A una quantità dipendente da quattro altre, che indichiamo con m, n, p, q ; ed essa varii in ragion diretta delle tre prime ed in ragion inversa dell' ultima; cioè m divenendo m' , A divenghi A' , in modo che si abbia $m : m' :: A : A'$; e poi n divenendo n' , A' divenghi A'' , in modo che si abbia $n : n' :: A' : A''$; ed indi p divenendo p' , A'' divenghi A''' , in modo che si abbia $p : p' :: A'' : A'''$; e finalmente q divenendo q' , A''' divenghi A'''' ,

243. Abbiassi per secondo esempio il seguente problema.

Se 8 machine , che agiscono 10 ore al giorno con egual velocità, hanno fatto un certo lavoro in 35 giorni; si domanda quanto tempo dovranno impiegare a fare la stessa quantità di lavoro 5 machine , che agiscono 14 ore al giorno con una velocità tripla di quella delle prime.

Osserviamo in primo luogo che la velocità di ciascuna delle seconde machine essendo tripla di quella di ciascuna delle prime; se la velocità delle prime si rappresenti con 1, quella delle seconde verrà rappresentata da 3: e però le grandezze dell' enunciato del pro-

blema dovranno scriversi come si vede qui di contro. Poscia esaminando le ragioni contenute in esso enunciatò se sono dirette o inverse

di quella de' giorni, si troverà che sono tutte inverse: laonde la proporzione da stabilirsi sarà la seguente $x:35::$

$$8 \times 10 \times 1 : 5 \times 14 \times 3, \text{ da cui si ricava } x = \frac{35 \times 8 \times 10}{5 \times 14 \times 3}$$

$$= \frac{5 \times 10}{3} = 13 \frac{1}{3}; \text{ e poichè la durata del lavoro giornaliero}$$

delle seconde machine è di ore 14, e la terza parte di 14 ore è 4or. 40mi., si avrà $x = 13 \text{gior. } 4 \text{or. } 46 \text{mi.}$

244. Abbiassi per ultimo esempio quest'altro problema.

Il capitano di una nave sulla quale erano 90 persone, per un viaggio di 40 giorni ha speso 65 ducati a biscotto, cal-

in modo che si abbia $q':q::A''':A''''$. Dico che sarà

$$A:A''''::(m:m')(n:n')(p:p')(q:q').$$

In effetti, le grandezze A, A', A'', A''', A'''' , essendo omogenee, si avrà $A:A''''::(A:A')(A':A'')(A'':A''')(A''':A'''')$; ma avendo poco fa osservato che $A:A'::m:m'$, ed $A':A'':n:n'$, ed $A'':A''::p:p'$, ed $A''':A''':q':q'$; ne segue che si avrà $A:A''''::(m:m')(n:n')(p:p')(q:q')$.

colato a 7 ducati il cantaio. Dovendo poi intraprendere un viaggio di 5 mesi con 160 persone, e dovendo comprare il biscotto a ducati $8\frac{1}{2}$ il cantaio; si domanda che danaro dovrà spendere?

Esaminando le ragioni contenute nell'enunciato di questo problema, se sono dirette o inverse di quella della cosa cercata alla data della stessa specie, si troverà che sono tutte dirette, e la proporzione che dà il valore dell'incognita sarà la seguente $x : 65 :: 160 \times 150 \times 8\frac{1}{2} : 90 \times 40 \times 7$, da cui si ricava $x = \frac{65 \times 160 \times 150 \times 8\frac{1}{2}}{90 \times 40 \times 7} = \frac{65 \times 2 \times 5 \times 17}{3 \times 7}$
 $= 526\frac{4}{11} = 526,19.$

Problemi d'interesse.

243. Allorché il danaro si dà in prestito, colui che lo toglie a prestito deve, dopo un certo tempo, restituire non solo quello che si ha prestato, ma ben anche un dippiù, per quell'utile che il proprietario avrebbe potuto ritrarne, se avesse impiegato diversamente il suo danaro. Quel dippiù che si restituisce dopo un dato tempo si chiama *interesse*. L'interesse dopo un anno si chiama *rendita*. Il danaro prestato si chiama *capitale*, *fondo*, o *sorte principale*.

Il rapporto fra il capitale ed il suo interesse dopo un anno si chiama *ragione dell'interesse*. Questa ragione ordinariamente si stabilisce fra il capitale 100 e l'interesse corrispondente a 100 dopo l'anno: e però il capitale 100 suole dirsi capitale *elementare* o *di paragone*. Così, per esempio, quando si dice di essersi impiegato il danaro alla ragione del 6 per 100, significa che la ragione del capitale alla sua rendita equivale a quella di 100 a 6, o in altri termini, per ogni 100 ducati debbonsi pagare dopo un anno 6 ducati d'interesse.

Dunque ne' problemi d'interesse entrano quattro grandezze, una delle quali non si nomina, ma evvi tacitamente compresa, ed è il capitale elementare 100; le altre poi sono, la ragione dell'interesse, il capitale, e la rendita corrispondente ad esso; e però essendo date due di queste ultime tre grandezze, si può trovare la terza, come vedremo ne' seguenti esempi.

1.° *Il capitale di 860 ducati impiegato alla ragione del 6 per 100, che rendita darà?*

N. B. Suole scriversi per brevità $6 \text{ p}^{\circ}/_{100}$, invece di 6 per 100.

Scrivendo le grandezze contenute nell'enunciato del problema come si scorge qui a fianco, osserviamo

che, se il secondo capitale fosse doppio, tri-	cap.	rend.
plo, ec. del primo, anche la rendita corrispon-	100	6
dente al primo sarebbe doppia tripla, ec. di	860	x
quella corrispondente al secondo; e viceversa:		

adunque la ragione de' capitali è uguale e diretta a quella delle loro rendite; perciò si avrà la proporzione $100 : 860 :: 6 : x$, d'onde si ricava $x = 51,6$.

2.° *Il capitale di 2300 ducati avendo dato per rendita 140 ducati; si domanda a che ragione è stato impiegato?*

Ragionando come nell'esempio precedente, si trova che la proporzione da cui dipende l'incognita è la seguente $2300 : 100 :: 140 : x$, da cui si desume $x = 6 \frac{2}{3} = 6,09$.

3.° *Si domanda qual sia il capitale che impiegato alla ragione del 4 p^o/ da 72 ducati di rendita?*

Il medesimo ragionamento tenuto negli esempi precedenti condurrà alla proporzione $4 : 72 :: 100 : x$, dalla quale si trae $x = 1800$.

246. Ne' problemi d'interesse potrebbe entrare anche la considerazione del tempo; ed allora fa uopo avvertire che vi è compreso tacitamente anche il tempo di un anno, il

quale non si enuncia. Ecco qui appresso alcuni esempi di questa natura.

1. *Un capitale di 5320 ducati impiegato per 29 mesi alla ragione del 5 per 100 che interesse darà ?*

Si può trovare prima l'interesse dopo l'anno, ossia la rendita, con la proporzione $100 : 5 :: 5320 : x$, dalla quale si trae $x = 266$; e poi si troverà l'interesse dopo 29 mesi, considerando che l'anno è composto di 12 mesi, e si dirà: se un capitale dopo 12 mesi ha dato 266 ducati d'interesse, dopo 29 mesi che interesse darà? Ciò conduce alla proporzione $12 : 29 :: 266 : x$, da cui si desume $x = 642 \frac{5}{6} = 642,83$.

Si potrebbe giungere al medesimo risultamento con la regola del tre composta; poichè, scrivendo le grandezze dell'enunciato del problema come si scorge

qui a fianco, si trova che la ragione de-	cap.	mesi	inter.
gl'interessi è diretta di quella de' capitali e	100	12	5
de' tempi, e però si avrà la proporzione	5320	29	x
$x : 5 :: 5320 \times 29 : 100 \times 12$, da cui si de-			
sume $x = 642 \frac{5}{6}$.			

2. *Si domanda a che ragione è stato impiegato il capitale di 2000 ducati, il quale dopo 5 mesi ha dato 64 ducati d'interesse ?*

Potremo risolvere questo problema trovando con una prima proporzione la rendita, e poi con una seconda proporzione si troverà la ragione dell'interesse. Ma possiamo anche giungere al medesimo risultamento con una sola proporzione, mediante la regola del tre composta; e si troverà $x = 7 \frac{17}{25} = 7,68$.

3. *Si domanda qual sia il capitale che impiegato alla ragione del $6 \frac{1}{2}$ p/o, dopo 18 mesi dà 90 ducati d'interesse ?*

Questo problema risoluto nel primo, o nel secondo de' due modi accennati, farà conoscere che il capitale cercato è uguale a ducati $2076 \frac{11}{13} = 2076,92$.

Regola di sconto.

247. Passiamo ora a stabilire una regola generale la quale ci faccia conoscere quanto divenghi un capitale unito al suo interesse dopo un determinato tempo. Sia, per esempio, il capitale di 800 ducati che voglia impiegarsi alla ragione del 6 p %: si vuol sapere quanto divenghi dopo sette mesi unito al suo interesse.

Indi chiamo con x l'interesse corrispondente a 100 dopo 7 mesi, e con y l'interesse corrispondente al capitale: si avrà la proporzione $100 : 800 :: x : y$, da cui si ricava $y = \frac{x \times 800}{100}$. Aggiungendo ora questo interesse al capitale 800, si otterrà il valore del capitale unito al suo interesse, che sarà $800 + \frac{800 \times x}{100}$, ossia 800 che moltiplica 1 e che moltiplica pure $\frac{x}{100}$; quindi il

valore del capitale unito al suo interesse può scriversi così, $800 \left(1 + \frac{x}{100} \right)$.

Or poichè $\frac{x}{100}$ è la ragione fra 100 ed il suo interesse dopo 7 mesi; ne segue che, il valore di un capitale unito al suo interesse dopo un dato tempo, si ottiene moltiplicando il capitale per l'unità accresciuta della ragione dell'interesse corrispondente a quel tempo.

Questa regola fra le altre applicazioni, si usa nello sconto delle cambiali o boni; per il che premettiamo le seguenti nozioni.

Sogliono rilasciarsi in commercio alcune carte dette *cambiali* con le quali un negoziante promette di pagare una somma di danaro dopo un dato tempo; ma se colui che deve esigere il danaro volesse introitarlo prima dell'epoca stabilita nella cambiale, ossia prima della *scadenza* di essa, può presentarsi dal negoziante, o da altra persona (quando il negoziante gode la pubblica fiducia) affinchè gli sia anticipato il pagamento, rilasciando un utile a chi glielo anticipa. L'utile che si ritiene colui il quale anticipa il pagamento si chiama *sconto*. Il valore della cambiale all'epoca della scadenza si chiama *valor nominale*. Ciò che resta togliendo lo sconto dal valor nominale della cambiale, si chiama *valore attuale* della stessa.

Supponiamo ora che una persona, per avere il pronto pagamento di una cambiale di 1500 ducati pagabili dopo 7 mesi, vada da un negoziante che impiega il suo danaro al 6 p %. Si domanda qual sia lo sconto che deve ritenersi il negoziante?

È chiaro che il negoziante deve dare al padrone della cambiale tal somma di danaro che, unita al suo interesse dopo 7 mesi, deve formare 1500 ducati. Perciò, se indichiamo con y questa somma di danaro, il suo valore dopo 7 mesi sappiamo che si ottiene moltiplicando y per l'unità accresciu-

ta della ragione dell' interesse dopo il detto tempo : ora l' interesse dopo un anno essendo 6, quello dopo 7 mesi sarà $\frac{7}{2}$, e però la ragione dell' interesse

sarà $\frac{7}{2} : 100 = \frac{7}{200}$. Adunque la somma y dopo 7 mesi diverrà $y \left(1 + \frac{7}{200}\right)$;

ma abbiamo detto che deve essere uguale a 1500 ducati, perciò si avrà $y \left(1 + \frac{7}{200}\right) = 1500$; e dividendo l'una e l'altra di queste grandezze ugua-

li per $1 + \frac{7}{200}$, ne verrà $y = \frac{1500}{1 + \frac{7}{200}}$; cioè, il valore attuale della cambiale si ottiene dividendo il suo valor nominale per l' unità accresciuta della ragione dell' interesse corrispondente al tempo che ci vuole per la scadenza.

Eseguendo il calcolo, si trova $y = 1449,28$; e però lo sconto viene eguale a ducati 50,72.

Lo sconto calcolato in questo modo si dice preso *al di dentro*; e questa è la giusta maniera di calcolarlo. Ma ordinariamente esso si prende *al di fuori*, cioè si calcola l' interesse che il valor nominale della cambiale darebbe sino all' epoca della scadenza, e quest' interesse si prende per sconto. Così nel nostro esempio lo sconto si troverebbe calcolando l' interesse di 1500 ducati dopo 7 mesi alla ragione del 6 p. 100 l' anno, il quale interesse sarà di ducati 52,50 : or quest' interesse prendendosi per sconto, se si toglie dal valor nominale della cambiale si avrà il valore attuale della stessa, che sarà 1447,50. Questo valore differisce dal giusto, che abbiamo trovato col prendere lo sconto *al di dentro*, per ducati 1,78.

248. Conoscendo il valor attuale della cambiale, potrebbe trovarsi a che ragione il negoziante il quale anticipa il pagamento impiega il suo danaro. Difatti, dall' eguaglianza $y \left(1 + \frac{7}{200}\right) = 1500$ si scorge che dividendo il valor nominale per quello attuale, il quoziente sarà l' unità accresciuta della ragione dell' interesse riferito al tempo della scadenza; e però togliendo dal quoziente l' unità, si avrà la ragione del detto interesse; e poscia da questa ragione si passerà a trovar quella dopo l' anno.

249. Se un Governo ha bisogno di danaro forma un debito con i particolari, pagandone l' interesse ad una determinata ragione, per esempio al 5 p. 100; e poichè i nomi de' creditori si fanno scrivere in un registro destinato all' uopo che vien detto *Gran libro*, la rendita che essi debbono esigere dal Governo dicesi *consolidata* o *iscritta*. Ma per non rendere inceppati i capitali de' creditori, si permette che essi possano venderla la loro rendita ad altre persone, dovendosi dichiarare all' Ufficio del Gran Libro la persona che vende e quella che compra, affinchè la rendita iscritta in testa ad uno possa *trasferirsi* in testa ad un altro, vale a dire, a' *iscrive* sul

Gran Libro il nuovo possessore della rendita. Il Governo intanto destina un fondo che suol dirsi *Cassa di ammortizzazione*, e col danaro preso da questo fondo compra la rendita da particolari per estinguere o *ammortizzare* a poco a poco il debito contratto: quindi è che con l'andar del tempo il debito del Governo diminuendosi, i creditori vendono a più caro prezzo la loro rendita, e così avviene che il prezzo della stessa aumenta; ma esso potrebbe anche diminuire o per vicende politiche, o perchè il Governo avendo bisogno di più danaro contrae nuovi debiti.

Ne' contratti di rendita iscritta, l'interesse elementare si considera fisso, ed il capitale corrispondente è variabile. Così, per esempio, il prezzo della rendita si dice crescere o diminuire di uno o più *punti*, secondo che il capitale corrispondente alla rendita elementare cresce o diminuisce di una o più unità. In Napoli l'unità è il ducato, e la rendita elementare fissa è 5 ducati, perciò il prezzo della rendita, ossia il capitale corrispondente a 5 ducati si fa variare per ducati, ed anche per frazioni di ducato, ma solamente per mezzi, terzi, quarti, ed ottavi: così, per esempio, se oggi la rendita si vende al 102, e domani aumenta di un punto, significa che oggi potevansi comprare 5 ducati di rendita con 102 ducati; ma domani per avere 5 ducati di rendita vi bisognano 103 ducati; e se fosse aumentata di 1 punto e $\frac{3}{8}$, vuol dire che domani per avere 5 ducati di rendita ci vogliono

ducato 103 $\frac{3}{8}$. La variazione del prezzo della rendita si legge ogni giorno su i *listini della Borsa*, che soglionsi inserire anche su i giornali.

Dietro i principii appresi ne' numeri precedenti, può risolversi qualunque questione relativa alla rendita iscritta. Così, per esempio, se si volessero acquistare 36 ducati di rendita, il cui prezzo corre al 98. Si dirà: Se 3 ducati di rendita corrispondono al capitale 98; 36 ducati a qual capitale corrisponderanno? Si avrà la proporzione $5 : 36 :: 98 : x$; d'onde si ricava $x=705,60$; cioè vi bisognano 705 ducati e 60 grani per comprare 36 ducati di rendita iscritta.

250. Vi sono altre specie di contratti che diconsi d'*interessi a moltiplico*, d'*interessi a scalare*, di *annualità*, e *vitalizi*: ma non è qui il luogo di poter risolvere queste quistioni; e solamente, per darne un'idea, dichiariamo cosa sieno questa sorta di contratti.

Gl'*interessi a moltiplico*, che più propriamente diconsi *interessi composti*, sono quelli in cui il creditore dopo l'anno non ritira l'interesse del suo danaro, ma lo fa rimanere in mano del debitore per riscuoterne dopo il secondo anno anche l'interesse; e dopo il secondo anno gl'interessi nè anche si esigono, affinchè dopo il terzo anno possano averli gl'interessi degli interessi; e così continuando in ogni anno, dopo un certo numero di anni si troveranno cumulati capitale ed interessi d'interessi.

Gl' *interessi a scalare*, sono quelli in cui si conviene che il debitore paghi ogn' anno una determinata somma al creditore, la quale sia sempre maggiore dell' interesse; affinchè con una parte di questa somma si soddisfi l' interesse, e con la rimanente parte si diminuisca il capitale: in tal modo dopo un certo numero di anni si troverà estinto il capitale. Allorchè la somma che in ogn' anno paga il debitore è la stessa, essa prende il nome di *annualità*. Se un contratto è stabilito con la condizione di doversi dare ad una persona un' annualità durante la vita, quest' annualità si chiama *vitalizio*.

A R T. III.

Regola di società.

251. Si chiama *regola di società* o di *compagnia* quella che ha per oggetto di dividere fra più socii il guadagno o la perdita avuta in un negozio, proporzionalmente a' capitali da essi impiegati.

Per risolvere un problema appartenente alla regola di società, si sommino i capitali parziali di tutti i soci, e si avrà il capitale totale; poi si stabilisca la proporzione: Capitale totale sta a capitale parziale di un socio, come il guadagno totale sta al guadagno parziale del medesimo socio.

Sieno, per esempio, tre negozianti i quali hanno impiegato rispettivamente i capitali di 3000 ducati, di 2400 ducati, e di 1000 ducati; e dopo un certo tempo hanno guadagnato 1200 ducati: si domanda che porzione di questo guadagno debba toccare a ciascuno?

Si addizionano prima i capitali parziali, e si avrà per somma 6400 ducati, che è il capitale totale. Poi per trovare i guadagni rispettivi del primo, del secondo, e del terzo socio, si stabiliranno le tre seguenti proporzioni.

$$6400 : 3000 :: 1200 : x;$$

$$6400 : 2400 :: 1200 : y,$$

$$6400 : 1000 :: 1200 : z;$$

dalle quali si ricava $x=562,5$, $y=450$, $z=187,5$.

Si può far la *PROVA* sommando i tre guadagni ottenuti ; poichè da loro somma deve formare il guadagno totale, se le operazioni sono state ben fatte.

Dim. È chiaro che se il capitale di un socio è metà, terza parte, ec. del capitale totale, anche il guadagno particolare di quel socio dovrà essere la metà, la terza parte, ec. del guadagno totale : adunque la ragione del capitale parziale al capitale totale sarà uguale a quella del guadagno parziale al guadagno totale : e però, riguardo al primo socio, si avrà la proporzione $6400 : 3000 :: 1200 : x$; riguardo al secondo, si avrà la proporzione $6400 : 2400 :: 1200 : y$; e riguardo al terzo si avrà la proporzione $6400 : 1000 :: 1200 : z$; le quali proporzioni daranno per x, y , e z i valori trovati di sopra.

252. Allorchè i capitali non sono tutti impiegati pel medesimo tempo, la regola di società dicesi *composta*. Così, per esempio, se una persona abbia messo in negozio un capitale di 358 ducati, e dopo 8 mesi associi con sè un'altra persona che mette nel medesimo negozio un capitale di 500 ducati, e dopo un anno vi si associi una terza persona che vi aggiunga un capitale di 800 ducati; trascorsi poi due anni, si fa il conto per vedere che utile siasi ottenuto, e questo si trova essere di 1000 ducati; si domanda che parte di esso debba toccare a ciascuno de' socii?

Si riferiranno i capitali ad un medesimo tempo che sia parte aliquota de' tempi in cui sono stati impiegati; perciò li riferiamo ad un mese (sebbene sarebbe più semplice riferirli a 4 mesi). Poi osservando che il capitale di 358 ducati del primo socio è stato impiegato per 2 anni ossia per 24 mesi, si dirà: il frutto che dà il capitale di 358 ducati dopo 24 mesi equivale al frutto che dà un capitale 24 volte maggiore dopo un mese; e però il frutto che spetta al primo socio equivale a quello che percepirebbe dopo un mese dal capitale di ducati 358×24 , ossia di 8592 ducati.

Riguardo poi al secondo socio, siccome il suo capitale di 500 ducati è impiegato per 16 mesi, si dirà: il frutto che dà il capitale di 500 ducati dopo 16 mesi equivale a quello che dà un capitale 16 volte maggiore dopo un mese; quindi il frutto che spetta al secondo socio, equivale a quello che percepirebbe dopo un mese dal capitale di ducati 500×16 , ossia di 8000 ducati. Infine, riguardo al terzo socio, siccome il suo capitale di 800 ducati è stato impiegato per 12 mesi; ragionando similmente, si trova che il

frutto il quale gli spetta, equivale a quello che si ricava dopo un mese dal capitale di ducati 800×12 , ossia di 9600 ducati.

Dunque la quistione si è ridotta alla seguente. *Tre soci hanno impiegato pel medesimo tempo i capitali di 8592 ducati, di 8000 ducati, e di 6600 ducati; e dopo il detto tempo trovano aver guadagnato 1000 ducati. Si domanda il guadagno particolare che deve toccare a ciascun di loro?*

Questa quistione risolta come quella del n.° (251), si troverà che il guadagno del primo socio è di ducati 328,04, il guadagno del secondo è di ducati 305,43, e quello del terzo è di ducati 366,52.

Divisione di un numero in parti proporzionali ad altri numeri dati.

253. Se ben si rifletta, il problema della regola di società risoluto nel n.° (251), si è ridotto a dividere un numero in parti proporzionali ad altri numeri dati. Adunque dovendosi dividere un numero in parti proporzionali ad altri numeri dati, per trovare ciascuna delle sue parti bisognerà stabilire la proporzione: *Numero da dividersi sta a ciascuna sua parte, come la somma dei numeri dati sta a quello corrispondente alla detta parte.*

Passiamo ora a trattare qualche quistione, la quale anche dipenda, come quelle della regola di società, dalla divisione di un numero in parti proporzionali ad altri numeri dati.

Dovendosi in molta fretta riattare una fortezza, si distribuiscono i lavori a diversi appaltatori, e rispetto al pagamento si conviene che terminati i lavori, si valuteranno, e la totalità del prezzo sarà distribuita tra gli appaltatori in ragione della quantità di lavoro fatto eseguire da ciascuno, non meno che della quantità e della sollecitudine con la quale fu portato a termine. Si domanda come dovrà regolarsi la distribuzione? ()*

Sieno quattro gli appaltatori, e rappresentiamo con x, y, z, u le rate di ciascuno; le rispettive quantità di lavoro sieno denotate da' numeri 20, 30, 15, 54; e le corrispondenti qualità sieno indicate da' numeri 25, 27, 28, 24, i quali numeri rappresentano i prezzi di un'egual porzione di lavoro eseguita da' diversi appaltatori, perchè quando le quantità sono uguali (ed i

(*) Questo problema estratto dall'aritmetica del dotto prof. Amante, l'abbiamo qui riportato onde far notare la diversità che troviamo nei risultati. Ciò deriva dall'aver egli sostituito a' tempi totali quelli in cui si sono fatte le unità di lavoro; ma allora diviene superflua la ragione delle quantità di lavoro, e perciò le rate staranno fra loro nella sola ragione diretta delle quantità di lavoro, ed in ragione inversa de' tempi impiegati ad eseguire l'unità di lavoro.

materiali sono della stessa natura), i prezzi sono proporzionali alle qualità; e sieno infine 10, 15, 9, 36 i rispettivi tempi impiegati dagli appaltatori ad eseguire i lavori.

Or poichè la rata di ciascun appaltatore debb' essere in ragion diretta della quantità e della qualità del rispettivo lavoro, ma dev' essere in ragione inversa dal tempo impiegato ad eseguirlo, è manifesto che se il tempo fosse 1 per tutti gli appaltatori, le loro rate saranno proporzionali alle sole quantità e qualità, cioè saranno proporzionali a' prodotti 20×25 , 30×27 , 15×28 , 54×24 ; ma se il tempo fosse doppio, triplo, ec. esse dovendo essere in ragione inversa dal tempo, saranno come le metà, le terze parti ec. de' detti prodotti. Nel nostro caso i tempi essendo 10, 15, 9, 36, i numeri proporzionali alle rate x, y, z, u saranno rispettivamente $\frac{20 \times 25}{10}$, $\frac{30 \times 27}{15}$,

$\frac{15 \times 28}{9}$, $\frac{54 \times 24}{36}$, ed eseguendo le semplificazioni su questi numeri, e moltiplicandoli poscia per 3, e dividendoli per 2, le rate, n.º (221), veranno infine proporzionali a' numeri 75, 87, 70, 54.

Si giungerà al medesimo risultato scrivendo le quantità date a fianco alle corrispondenti rate, come si vede qui di contro; e ragionando poi come si fa nella regola del tre composta, si troverà che i rapporti fra x, y, z, u sono $x : y :: 20 \times 25 \times 15 : 30 \times 27 \times 10$,

$y : z :: 30 \times 27 \times 9 : 15 \times 28 \times 15$, $z : u :: 15 \times 28 \times 36 : 54 \times 24 \times 9$; ma per trovare quattro numeri ordinatamente proporzionali ad x, y, z, u converrà stabilire le proporzioni $y : z$, ossia $30 \times 27 \times 9 : 15 \times 28 \times 15 :: 30 \times 27 \times 10 : \frac{15 \times 28 \times 10 \times 15}{9}$; e $z : u$ ossia $15 \times 28 \times 36 : 54 \times 24 \times 9$

$:: \frac{15 \times 28 \times 10 \times 15}{9} : \frac{54 \times 24 \times 10 \times 15}{36}$. Perciò i quattro numeri propor-

zionali x, y, z, u sono $20 \times 25 \times 15$, $30 \times 27 \times 10$, $\frac{15 \times 28 \times 10 \times 15}{9}$,

$\frac{54 \times 24 \times 10 \times 15}{36}$, che divisi tutti pel prodotto 10×15 , si riducono a

$\frac{20 \times 25}{10}$, $\frac{30 \times 27}{15}$, $\frac{15 \times 28}{9}$, $\frac{54 \times 24}{36}$, ovvero a' numeri 75, 87, 70, 54, come di sopra abbiamo osservato.

Giova avvertire che in questa seconda maniera di risolvere il problema, per meglio vedere come in generale i numeri cercati si compongano per mezzo de' dati, i dati dovrebbero indicarsi con lettere.

254. Passiamo ad un altro esempio, per vedere come bisogna regolarci nel caso in cui vi si aggiunga una circostanza che andremo a dire.

Tre socii intraprendono la traduzione di un' opera classica , impiegandovi tutti danaro e fatica. Il primo v'impiega 2000 ducati, il secondo 1200, ed il terzo 800. Il primo poi traduce 5000 pagine dell' opera , il secondo 3000 , ed il terzo 3000. Terminata l' opera , ed avutane sufficiente vendita di copie , trovano aver guadagnato 4000 ducati. Si domanda come debba distribuirsi un tal guadagno fra i socii?

È chiaro che la rata di ciascuno socio debba essere in ragion diretta del danaro e della fatica che esso vi ha impiegata ; perciò il guadagno totale deve dividersi proporzionalmente a' numeri 2000×5000 , 1200×8000 , ed 800×3000 , ossia a' numeri 25, 24, e 6.

Se vi concorresse un quarto socio , ma col solo aiuto pecuniario di 3000 ducati, senza occuparsi della traduzione dell'opera; allora converrebbe valutare in danaro la fatica di traduzione fatta da tre primi socii, ed aggiungerla a' rispettivi capitali parziali da essi impiegati. Così, per esempio, supponendo che il lavoro di traduzione sia stimato 2500 ducati , bisognerà dividere questi 2500 ducati proporzionalmente a' lavori rispettivi de' tre socii , cioè a' numeri 5000, 8000, e 3000, ossia a' numeri 5, 8, e 3, il che fatto, si troverà che le fatiche di traduzione equivalgono rispettivamente a duc. 781,25, a ducati 1250, ed a ducati 468,75. Aggiungendo poi questi numeri a' rispettivi capitali parziali de' tre primi socii , essi diverranno 2781,25, 2450 , 1268,75. Adunque il problema si è ridotto ad una regola di società semplice, perchè il guadagno si dovrà dividere proporzionalmente a' capitali di ducati 2781,25, 2450, 1268,75, e 3000 impiegati da' quattro socii.

A R T. IV.

Regola di alligazione.

254. Allorché si mescolano più cose le quali si riferiscono alla medesima unità , ed i valori di queste unità sono differenti , se vogliasi trovare il valore di un' unità della mescolanza , la regola che insegna a trovarlo si chiama *regola di alligazione* (*).

In questa regola potrebbe aversi anche per fine di trovare che quantità bisogna prendere di ciascuna delle cose le quali vogliono mescolarsi , affinché l' unità del mescolamento risulti di un dato valore. Ma il problema consi-

(*) Essa prende questo nome dalle molte applicazioni che se ne fanno a' problemi relativi alle *leghe* metalliche.

derato sotto questo aspetto, specialmente allorché le cose da mescolarsi sono più di due, è di pertinenza dell' algebra.

Si mescolino , per esempio, 16 barili di vino del prezzo di 20 carlini il barile , con 15 di quello di 24 carlini il barile , e con 26 di quello di 18 carlini il barile. Si domanda qual sia il prezzo di un barile del vino mescolato ?

Scrivendo i dati come

	<i>barili</i>	<i>prezzi corrispondenti</i>
si vede qui di contro, oss-	16	$20 \times 16 = 320$
serviamo primieramente	15	$24 \times 15 = 360$
che il prezzo di un ba-	26	$18 \times 26 = 468$
rile del primo vino es-		
sendo 20 carlini, il prez-	tot. 57	tot. 1148

zo di 16 barili sarà

20×16 , ossia 320 carlini. Similmente si scorge che il prezzo de' 15 barili del secondo vino sarà 24×15 , ossia 360 carlini; ed il prezzo de' 26 barili del terzo vino sarà 18×26 , ossia 468 carlini. Sommiamo ora tutti i barili del vino mescolato, la loro somma sarà 57: sommiamo pure i loro prezzi, e si avrà che il prezzo totale di 57 barili è 1148 carlini. Quindi è manifesto che, se 57 barili costano 1148 carlini, il prezzo della 57esima parte, che è il barile, si ottiene prendendo la 57esima parte del prezzo totale, cioè dividendo 1148 per 57, che dà per quoziente 20,14. Adunque:

Per ottenere il prezzo dell' unità della mescolanza bisogna dividere il prezzo di tutto il mescuglio per il numero delle unità che esso contiene.

255. Aggiungiamo, per esercizio de' giovanetti, quest' altro esempio.

Dovendosi formare 100 rotoli di ottone con le proporzioni di 64 rotoli di rame, 33 di zinco, e 3 di stagno e piombo, cioè rotoli $1 \frac{1}{4}$ di stagno, ed $1 \frac{1}{4}$ di piombo: si è comprato il rame a grana 55 il rotolo, lo zinco a grana 16, lo

stagno a grana 60 , ed il piombo a grana 13. Si domanda quanto costi un rotolo di ottone (*).

Operando come nell'esempio precedente , si troverà che un rotolo di ottone costa grana 42.

256. Aggiungiamo qualche altro esempio ; per la tua intelligenza premettiamo le seguenti nozioni. L'oro e l'argento non potendo , senza costose operazioni , separarsi interamente da altre sostanze con le quali trovansi allegati ; si preferisce perciò adoperarli un poco impuri , il che giova anche ad aumentarne la durata. Il rapporto fra il peso dell'oro e dell'argento puro contenuto in una massa d'oro impuro ed il peso totale di questa massa, si chiama *titolo* dell'oro o dell'argento. Ordinariamente il peso di tutto il miscuglio o *lega* si concepisce diviso in 1000 parti uguali, e perciò un certo numero di queste parti sarà peso di metallo fino ed un cert'altro numero sarà peso di metallo più vile, come rame o ferro. Supposto che delle 1000 parti in cui si divide tutta la massa, 965 sieno di oro puro , ed il resto di altro metallo, il titolo dell'oro sarà di $\frac{965}{1000}$, ossia di 0,965.

In altri tempi si usava; e si usa tuttavia, di esprimere il titolo in *carati*; cioè il peso dell'oro allegato si divideva in $2\frac{1}{4}$ parti uguali dette *carati*, così che, se 21 di queste $2\frac{1}{4}$ parti fossero state di oro fino, dicevasi che l'oro era di 21 carati. Il carato si dividevasi ancora in 32 parti uguali dette *grani*: così, per esempio, se il titolo dell'oro fosse stato di 21 carati e 25 grani, significava che il peso totale della massa conteneva $\frac{21}{24}$ più $\frac{25}{32}$ di $\frac{1}{24}$ di oro fino, ovvero la quantità dell'oro fino era rispetto alla massa totale dell'oro impuro, come $21\frac{25}{32}$ rispetto a 25.

Ciò premesso ; dovendosi coniare delle nuove monete di argento , si fondono insieme tre masse di questo metallo , la prima di 80 rotoli del titolo di 0,950, la seconda di 130 rotoli del titolo di 0,900, e la terza di 200 rotoli del titolo di 0,833: si domanda il titolo della nuova moneta?

È manifesto che il titolo de' primi 80 rotoli di argento essendo 0,950, la quantità di oro fino in essi contenuto sarà $80 \times 0,950$ ossia 76 rotoli. Per la stessa ragione i 130 rotoli del titolo di 0,900 conterranno $130 \times 0,900$ ossia 117 rotoli di fino; ed i 200 rotoli del titolo di 0,833 ne conterranno rotoli $200 \times 0,833$, ossia 166,6. Dunque tutte le tre masse conterranno ro-

(*) L'ottone è una lega di rame e zinco in cui suole unirsi una piccola parte di stagno ed anche piombo , presso a poco con le proporzioni date di sopra.

toli 359,6 di fino; e poichè la somma di tutte le tre masse e di 410 rotoli, il titolo cercato sarà $\frac{359,6}{410} = 0,877$:

Ora avendosi una massa di argento di maggior titolo, per esempio, del titolo di 0,950, se voglia conoscersi che quantità deve prendersi di questa massa per unirle a' 410 rotoli del titolo di 0,877, affinchè ne risulti una massa di un dato titolo che sia intermedio. Indicando con y la quantità di questa massa da aggiungersi a' 410 rotoli; poichè il suo titolo è di 0,950, la quantità di fino contenuto in essa sarà $y \times 0,950$; ma la quantità di fino contenuta in 410 rotoli è di rotoli 359,6; dunque il titolo della massa di 410 rotoli unita alla massa y sarà $\frac{359,6 + y \times 0,950}{410 + y}$; or questo titolo vo-

lendo che sia uguale a 0,900, si avrà $\frac{359,6 + y \times 0,950}{410 + y} = 0,900$; e moltiplicando queste due grandezze uguali pel denominatore $410 + y$, e supprimendo poscia il fattore $410 + y$ comune al numeratore ed al denominatore, ne verrà $359,6 + y \times 0,950 = (410 + y) 0,900$, ossia $359,6 + y \times 0,950 = 410 \times 0,900 + y \times 0,900$; e togliendo dall'una e dall'altra di queste grandezze uguali i numeri 359,6 ed $y \times 0,900$, ne risulterà $y \times 0,950 - y \times 0,900 = 410 \times 0,900 - 359,6$, ossia $y (0,950 - 0,900) = 410 \times 0,900 - 359,6$; e dividendo l'una e l'altra di queste grandezze uguali per $(0,950 - 0,900)$, si otterrà $y = \frac{410 \times 0,900 - 359,6}{0,950 - 0,900}$; cioè la quantità di argento da aggiungersi si ot-

tiene prendendo la differenza tra la quantità di fino contenuto nella massa antica, ed il prodotto di questa massa pel titolo della nuova; e dividendo poi questa differenza per quella fra il nuovo titolo e l'intermedio.

Che se poi si volesse conoscere la sola quantità di argento fino da aggiungersi alle 410 rotola affinchè ne risulti una massa di un dato titolo, il quale sarà maggiore di 0,877. Indicando con x la quantità di argento fino da aggiungersi, la massa totale diverrà $410 + x$, e la quantità di fino contenuto in essa sarà $359,6 + x$; perciò volendosi che il titolo sia, per esempio, di 0,900, si avrà $\frac{359,6 + x}{410 + x} = 0,900$; ed operando su di questa eguaglianza in una

maniera consimile a quella tenuta di sopra, si ricava $x = \frac{410 \times 0,900 - 359,6}{1 - 0,900}$.

257. Conoscendo il peso ed il titolo di due diverse monete, può trovarsi il valore al pari delle stesse; cioè il rapporto fra la quantità di metallo fino contenuto in una e la quantità di metallo fino contenuto nell'altra. Così, per esempio, conoscendosi che il peso di un franco, moneta di argento francese, è di trappesi 5,612, ed il suo titolo è 0,900; e conoscendosi che il peso di una piastra napolitana è trappesi 30,900, ed il suo titolo è 0,833: si avrà che il peso dell'argento fino contenuto nel franco sarà $3,612 \times 0,900$,

ossia 5,0508 , ed il peso dell'argento fino contenuto nella piastra sarà $30,900 \times 0,833$ ossia 25,7397. Quindi si dirà: se trappesi 25,7397 di argento fino valgono 12 carlini, trappesi 5,0508 quanto debbono valere? si avrà perciò la proporzione $25,7397 : 5,0508 :: 12 : x$; d'onde si ricava $x = 2,35$, cioè il valore di un franco è di grana $23 \frac{1}{4}$.

Del medio Aritmetico.

258. Quel numero che si ottiene sommando più numeri e dividendo la loro somma pel numero che indica quanti sono i numeri sommati, si chiama *medio aritmetico* fra questi numeri. Così, per esempio, il medio aritmetico fra 8, 10, 13, 18 sarà $\frac{8+10+13+18}{4} = 12 \frac{1}{4}$; ed il medio aritmetico fra 4, 8, 10, 12, 16 sarà $\frac{4+8+10+12+16}{5} = 10$, cioè sarà uno degli stessi numeri dati.

Il prezzo di un' unità della mescolanza trovato ne' numeri (254 e 255), il quale chiamasi *prezzo medio*, perchè compreso fra il massimo ed il minimo prezzo, non è che un medio aritmetico fra i diversi valori di tutte le unità contenute nelle grandezze date. Ma spesso avviene che il medio aritmetico è un numero di cui si fa uso invece di un altro, il quale non può ottenersi con precisione. Così, per esempio, allorchè bisogna misurare una grandezza, il cui valore è necessario che si abbia prossimo per quanto più è possibile all' esattezza; siccome un tal valore non può mai ottenersi esatto, a cagione de' mezzi imperfetti che noi abbiamo; per approssimarci il più che si possa al vero valore, si dà la seguente regola: *Si misura più volte la grandezza in parola, e poi la somma di tutte le misure ottenute si divide pel numero che indica quante volte si è misurata*; cioè si prende il medio aritmetico di tutte le misure ottenute.

Per dar ragione di questa regola, indichiamo la grandezza da misurarsi con x , e supponiamo che essa siasi misurata 5 volte, e siansi avute tutte misure eccedenti. È chiaro che la somma di queste misure sarà uguale a 5 volte x più la somma degli eccessi; e però una tal somma dividendosi per 5, si avrà un quoziente uguale ad x più la quinta parte della somma degli eccessi, la quale quinta parte sarà una grandezza intermedia all' eccesso massimo ed al minimo: adunque si otterrà per misura di x una grandezza che supera x di una quantità compresa fra l'eccesso massimo ed il minimo di quelli ottenuti.

Così pure, se le misure fossero state tutte in difetto, il medio sarebbe venuto uguale alla grandezza x meno la quinta parte della somma de' difetti; e questa quinta parte sarà intermedia fra il massimo ed il minimo de' difetti ottenuti.

Ma ordinariamente avviene che le misure sono parte in eccesso e parte in difetto; perciò la loro somma sarà uguale a 5 volte x più la somma degli eccessi meno la somma de' difetti, quale differenza fra somma degli eccessi e somma de' difetti scorgiamo dover essere una quantità molto picciola, specialmente quando la grandezza x siasi misurata molte volte; perchè allora avendosi parecchi eccessi e parecchi difetti, e più facile a combinarsi che ciascuno degli eccessi si trovi presso a poco uguale a ciascuno de' difetti, e quindi la differenza fra la somma degli eccessi e quella de' difetti riducendosi quasi a zero, il medio si riduce prossimamente uguale alla grandezza x .

A R T. V.

Regola congiunta.

259. Allorchè più grandezze omogenee non si riferiscono alla stessa unità, ma si conosce il rapporto che passa fra un certo numero di unità della prima ed un certo numero di unità della seconda, e fra un certo numero di unità della seconda ed un certo numero di unità della terza, e così di seguito sino all'ultima grandezza; la regola che insegna a trovare il rapporto fra un'unità della prima ed un'unità dell'ultima dicesi *regola congiunta* (*). Essa suole chiamarsi *regola de' cambi*, quando si applica alle monete.

Conoscendosi, per esempio, che 189 *palmi* napoletani equivalgono a 50 *metri*, e che 51 *metri* equivalgono a 157 *piedi* di Parigi, e che 200 *piedi* di Parigi equivalgono a 71 *yards* inglesi. Si domanda quanto sia un *yards* rispetto al palmo napoletano? (**)

(*) Si dice *congiunta*, dal perchè le quantità date sono congiunte l'una all'altra con un rapporto conosciuto.

(**) Tanto questi dati quanto quelli dell'esempio seguente sono sufficientemente prossimi al vero; ed i risultati vengono esatti sino a' centesimi inclusivamente.

Scrivendo le date relazioni come
 si vedè qui a fianco, si otterrà il ve- 71 *yar.* = 200 *pie.*
 lore di un yards rispetto al palmo 157 *pie.* = 51 *met.*
 dividendo il prodotto de' numeri 50 *met.* = 189 *pal.*
 che sono nella seconda colonna pel
 prodotto de' numeri che sono nella prima colonna; e quin-
 di si avrà 1 *yar.* = $\frac{200 \times 51 \times 189}{71 \times 157 \times 50}$ *di pal.*, ossia 1 *yar.*
 = *pal.* 3,45.

Dim. Difatti; poichè 71 yards pareggiano 200 piedi, si
 avrà 1 yards eguale a 200 piedi divisi per 71, cioè 1 *yar.* =
 $\frac{200}{71}$ *di pie.*; e per la stessa ragione si avrà 1 *pie.* = $\frac{51}{157}$ *di*
met., ed 1 *met.* = $\frac{189}{50}$ *di pal.* Quindi si deduce, n° (144),
 che 1 *yar.* = $\frac{200 \times 51 \times 189}{71 \times 157 \times 50}$ *di pal.* = *pal.* 3,45.

Giova notare che vi sonq ancora altri principii di cui si può far uso per
 risolvere un problema della regola congiunta, com'è, per esempio, quello
 in cui entra la considerazione della ragion composta.

260. Aggiungiamo per esercizio un altro esempio.

Conoscendosi che 87 ducati e 4 carlini napoletani equi-
 valgono a 100 talleri di Prussia, e che 4 talleri di Prussia
 equivalgono a 3 ristalleri correnti di Danimarca, e che 1000
 ristalleri correnti di Danimarca equivalgono a 432 ducati di
 Svezia: si domanda un ducato di Svezia quanto sia rispetto
 al ducato napoletano.

Scrivendo le quantità 432 *duc. di Svez.* = 1000 *ristal.*
 date come si scorge qui a 3 *ristal.* = 4 *tal.*
 fianco, ed operando come 100 *tal.* = 87,4 *duc. nap.*
 si è fatto nell' esem-
 pio precedente, si trova che 1 *duc. di Svez.* = $\frac{1000 \times 4 \times 87,4}{432 \times 3 \times 100}$
 = $\frac{10 \times 87,4}{108 \times 3}$ = *duc. nap.* 2,70.

PARTE TERZA

CAP. I.

ALTRE PROPRIETÀ DE' NUMERI.

261. Oltre a quelle proprietà de' numeri contemplate nel Cap. III. della prima parte di questi elementi, molte altre essi ne godono, fra le quali è interessante conoscere le seguenti.

ART. I.

262. *Se in una divisione il dividendo e il divisore si moltiplicano per lo stesso numero, e poi si divide il primo prodotto pel secondo, il resto che si ottiene sarà uguale al resto della prima divisione moltiplicato per quel medesimo numero.*

Dim. Supponiamo che il divisore della prima divisione sia 8, il resto 3, e 7 il moltiplicatore. Rammentando che, n.º (148), i quozienti delle due divisioni sono uguali, saranno rispettivamente uguali le parti intere e le parti fratte de' medesimi; ma la parte intera del primo quoziente è $\frac{3}{8}$, e la parte fratta del secondo ha per denominatore 8×7 ; dunque il suo numeratore dovrà essere 3×7 affinchè la prima parte fratta $\frac{3}{8}$ possa pareggiare l'altra che ha per denominatore 8×7 ; ma il numeratore 3×7 è il resto della seconda divisione, quindi esso è uguale a quello della prima moltiplicato per 7.

263. *Se due numeri si moltiplicano per uno stesso numero, il massimo comun divisore de' due prodotti che si ottengono sarà uguale al massimo comun divisore de' due numeri dati moltiplicati per quel medesimo numero.*

Sieno, per esempio, i due numeri 63 e 27, e di essi si sia trovato il massimo comun divisore. Se questi numeri si moltiplicano per 6, e poi si trovi il massimo comun divisore de' prodotti 63×6 e 27×6 , i resti successivi che si otterranno saranno rispettivamente uguali a quelli ottenuti nella ricerca del primo massimo comun divisore moltiplicati per 6, (n.° prec.); quindi nella seconda ricerca del massimo comun divisore, le divisioni si eseguiranno fra numeri rispettivamente uguali a quelli fra i quali esse eseguiransi nella prima ricerca moltiplicati per 6; e però dopo lo stesso numero di divisioni si giungerà ad una divisione esatta, ed il divisore della stessa essendo il massimo comun divisore, esso dunque pareggia il massimo comun divisore de' due primi numeri moltiplicato per 6.

264. *Se un numero divide il prodotto di due numeri interi, ed è primo con uno di questi numeri, dovrà dividere necessariamente l'altro.*

Sia il numero intero 15 che divide il prodotto 28×45 , ed è primo col fattore 28; dico che dovrà dividere necessariamente l'altro fattore 45.

Dim. Difatti 28 e 15 essendo primi fra loro, operando rispetto ad essi come se trovar si volesse il loro massimo comun divisore, si perverrà ad un resto uguale all'unità; ed operando similmente rispetto a' numeri 28×45 e 15×45 , cioè rispetto agli stessi numeri moltiplicati per 45, il massimo comun divisore di questi numeri sarà quello degli stessi numeri moltiplicati per 45 (num. prec.), cioè sarà 1×45 ,

ossia 45 (*). Ma ogni divisor comune a due numeri dovendo anche dividere, n.º (99), il loro massimo comun divisore ne segue che 15, il quale è divisor comune di 28×45 e 15×45 , dovrà dividere il loro massimo comun divisore 45. Ecco dunque dimostrato che il numero 15, il quale divide il prodotto 28×45 , ed è primo col fattore 28, deve dividere esattamente l'altro fattore 45.

AVVERTIMENTO. La dimostrazione della precedente verità esige che uno de' fattori del dato prodotto sia primo col divisore di esso prodotto; ma se volesse conoscersi più da vicino perchè la cosa non sempre è vera quando il divisore del prodotto non è primo con uno de' fattori; la ragione si è perchè allora alcuni fattori che compongono il detto divisore appartengono al primo fattore del prodotto dato, ed alcuni altri appartengono al secondo fattore; perciò l'anzidetto divisore componendosi di un numero di fattori che sono anche fattori del dato prodotto, dividerà questo prodotto senza dividere alcuno de' suoi fattori.

(*) Il profes. Sig. Rocco, ed un altro matematico di riguardo han creduto che se due numeri *primi fra loro* si moltiplicano per un medesimo numero, i prodotti risultanti dovessero avere per massimo comun divisore questo numero, senza che siavi bisogno di una rigorosa dimostrazione; e da ciò han fatto dipendere la dimostrazione che un numero non è decomponibile che in un sol sistema di fattori primi; ma sembra che essi sono incorsi in un circolo vizioso. Difatti, sieno 28 e 135 due numeri primi fra loro i quali si moltiplichino per 54 ; noi non conosciamo se ciascuno de' numeri risultanti dal moltiplicare 28 per 54 e 135 per 54 sia decomponibile in un sistema di fattori fra i quali non vi sieno quelli di 54 ; quindi se ciascuno de' prodotti 28×54 , e 135×54 è decomponibile in un sistema di fattori fra i quali non vi sono quelli di 54 , si avrà dritto a conchiudere che i detti prodotti possono avere un massimo comun divisore maggiore di 54 .

265. *Se un numero primo divide un prodotto di due fattori, deve dividere necessariamente uno di questi fattori.*

Difatti, il detto numero essendo primo, se non divide uno de' fattori del prodotto sarà primo con questo fattore; adunque, per la proposizione precedentemente dimostrata, deve dividere necessariamente l'altro.

266. *Un numero non può scomporsi che in un sol sistema di fattori primi.*

Sia, per esempio, il numero 330 che vien formato dal prodotto de' fattori primi 2, 5, 3, 11. Dico che qualunque numero primo il quale divide questo prodotto, non può essere uguale che ad uno de' fattori primi 2, 5, 3, 11; cioè il numero 330 non può risultare dalla moltiplicazione di fattori primi diversi da' precedenti.

Difatti, se questo numero primo che divide il prodotto 330 de' fattori 2, 5, 3, 11, non è uguale ad uno di questi fattori, per esempio, ad 11, esso non potendo dividere 11, perchè 11 è primo, dovrà dividere 2.5.3; ma dividendo 2.5.3, se non è uguale a 3, non potrà dividere 3, perchè 3 è primo; dunque dovrà dividere 2.5; ma dividendo 2.5, se non è uguale a 5, non potrà divider 5, perchè 5 è primo; quindi dovrà dividere necessariamente 2, e però sarà uguale a 2, perchè 2 è numero primo.

267. *Il massimo comun divisore di due numeri si compone da tutti i fattori comuni ad essi numeri.*

Difatti, supponiamo che sieno 3, 5, 7, 7, 11 i fattori primi comuni a' detti due numeri; tutti questi fattori dovranno dividere, n°. (99), il loro massimo comun divisore; questo dunque avrà per fattori i numeri 3, 5, 7, 7, 11; nè può contenerne altri diversi, perchè se ne contenesse un altro che non fosse comune a' due numeri proposti, questo fattore dividendo il loro massimo comun divisore dividerà anche cia-

scuno di essi numeri. Dunque sarebbe comune a' medesimi, il che è contro l'ipotesi.

268. Nel n.º (92) accennammo il metodo come trovare nella serie de' numeri dispari tutti i numeri primi; ma avvi un'altra maniera di trovarli senza bisogno di eseguir divisioni, per il che premettiamo le seguenti nozioni.

Indicando con x qualunque numero dispari, il prossimamente maggiore sarà $x+2$, e l'altro che vien dopo sarà $x+2+2$, ed il terzo sarà $x+2+2+2$, ossia $x+6$: dunque, se il numero x fosse divisibile per 3, il terzo dopo esso essendo $x+6$, sarà pure divisibile per 3; quindi si desume che i soli numeri dispari divisibili per 3 sono 3, $3+6$, $3+6+6$, $3+6+6+6$, ec., i quali nella serie de' numeri dispari si succedono di tre in tre posti. Similmente, indicando con x un numero dispari divisibile per 5, quello dopo esso che sarà pure divisibile per 5, sarà il numero $x+2+2+2+2+2 = x+10$, cioè sarà il quinto dopo esso: dunque i soli numeri dispari divisibili per 5 saranno 5, $5+10$, $5+10+10$, $5+10+10+10$, ec., i quali si seguono di cinque in cinque posti. Così pure, indicando con x un numero dispari divisibile per 7, il seguente numero dispari divisibile per 7 sarà $x+2+2+2+2+2+2+2 = x+14$, cioè sarà il settimo dopo esso: dunque tutti i numeri dispari divisibili per 7 sono 7, $7+14$, $7+14+14$, $7+14+14+14$, ec., i quali si succedono di sette in sette posti. Similmente si proseguirà innanzi.

Ciò premesso, ricordandoci, n.º (92), che per avere tutti i numeri primi bisogna scartare dalla serie de' numeri dispari tutti quelli divisibili per 3, 5, 7, ec., è chiaro che bisognerà scartare dalla detta serie tutti i numeri di tre in tre posti e contar da 9, perchè il primo numero 3 è primo; come pure tutti i numeri di cinque in cinque posti a contar da 15, perchè il primo numero 5 è primo; e così pure tut-

ti i numeri di sette in sette posti a contar da 21 , perchè il primo numero 7 è primo ; e così in appresso. Ed è da osservarsi che nel fare i scarti seguenti al primo , taluni numeri si trovano già scartati precedentemente : così, per esempio, nello scartare i numeri di cinque in cinque posti, quando si giunge a 15 ed a 45, questi numeri si trovano scartati con lo scarto fatto di tre in tre posti. Può anche avvertirsi che non evvi bisogno di scartare per numeri dispari multipli , come per esempio , di 9 in 9 , di 15 in 15 ; perchè questi scarti si trovano inclusi in quelli de' numeri dispari di cui son multipli ; quello per esempio , di 9 in 9 si trova incluso in quello di 3 in 3, e quello di 15 in 15 si trova incluso in quello di 3 in 3, ed anche in quello di 5 in 5 (*).

269. Nella nota al n.° (92) accennammo che per assicurarsi se un dato numero sia primo, non era necessario dividerlo per tutti i numeri primi minori del dato, ma eravi un limite a cui bisognava arrestarsi. Ecco in che modo si ottiene questo limite. Si divida il numero proposto per i numeri primi a contar da 3, e si arresti la divisione quando si sarà giunto al numero primo immediatamente minore della radice quadrata dal numero proposto , allorchè questa non è

(*) Eratostene filosofo greco, inventò questo metodo di trovare tutti i numeri primi. Egli immaginava scritti su di una tavola tutti i numeri dispari col loro ordine di grandezza a contar dall'unità , e sotto di essi intendeva praticati de' fori per i quali faceva cadere al di sotto della tavola tutti i numeri di tre in tre, a contar da 9 ; e tutti quelli di cinque in cinque a contar da 15 ; e tutti quelli di sette in sette a contar da 21 ; e tutti quelli di undici in undici a contar da 33 ; e così di seguito. In tal guisa si scartavano dalla serie de' numeri dispari tutti quelli non primi , e vi rimanevano solamente i numeri primi. Un tal metodo fu detto perciò *crivello di Eratostene*.

esatta , poichè se fosse esatta , allora è manifesto che il numero proposto non è primo.

Difatti, se il numero proposto fosse divisibile per un numero maggiore della sua radice quadrata, esso allora sarà il prodotto di un numero dispari maggiore della detta radice per un numero dispari minore della stessa ; dunque il numero proposto avrebbe un fattore dispari minore della sua radice quadrata , il che è assurdo ; poichè le divisioni per tutti i numeri dispari minori della sua radice quadrata , si sono già tentate, e non sono riuscite esatte (*).

Da qui si desume che quando si vuol decomporre un numero ne' suoi fattori primi , giusta la regola del n.° (93) , e si è giunto a dover dividere il quoziente per un numero primo maggiore della sua radice quadrata , può conchiudersi che un tal quoziente è primo, e quindi si arresteranno le divisioni.

A R T. II.

Ricerca di tutti i divisori di un numero dato.

270. Sia, per esempio, proposto a ritrovare tutti i divisori del numero 2700.

Si trovino primieramente tutti i divisori semplici del nu-

(*) Qui si scorge che per determinare anticipatamente sino a che punto debba continuarsi la divisione , bisogna saper estrarre la radice quadrata da un numero , cosa che fra breve apprendremo a fare ; ma coloro i quali non vogliono ricorrere all'estrazione della radice quadrata arresteranno la divisione allorchè saranno giunti ad un quoziente minore del divisore. Difatti, se si procedesse più oltre, la divisione non potrà mai riuscire esatta, altrimenti il numero proposto sarebbe divisibile per un numero minore del divisore , il che abbiám veduto di essere assurdo.

mero dato , secondo la regola del n.° (93) , a' quali si aggiunga anche l'unità , ed essi saranno 1, 2, 2, 3, 3, 3, 5, 5, come qui appresso si vede.

2700	1	1	
1350	2	2	
675	2	4	
225	3	3,	6, 12,
75	3	9,	18, 36,
25	3	27,	54, 108,
5	5	5,	10, 20, 15, 30, 60, 45, 90, 180, 135, 270, 540.
1	5	25,	50, 100, 75, 150, 300, 225, 450, 900, 675, 1350, 2700.

Poi , per trovare tutti i divisori del numero proposto , si comincerà dal formare tutti i divisori relativi al fattore semplice 2 includendovi anche l'unità , ed essi saranno 1, 2, 4. Indi tutti questi divisori si moltiplicheranno pel quarto fattore semplice 3, e si avranno i divisori 3, 6, 12. Poi questi tre ultimi divisori si moltiplicheranno pel quinto fattore semplice 3 , e si avranno gli altri tre divisori 9 , 18 , 36. Indi questi tre ultimi divisori si moltiplicheranno pel sesto fattore semplice 3 , e si avranno i tre divisori 27 , 54 , 108. In seguito tutti i divisori ottenuti si moltiplicheranno pel settimo fattore semplice 5, e si avranno i divisori 5, 10, 20, ec. Infine questi ultimi divisori si moltiplicheranno per l'ottavo fattore semplice 5, e si avranno i divisori 25, 50, 100, ec. Quindi si conchiude che il numero 2700 avrà in tutto 36 divisori.

Se il numero proposto fosse stato 18900 , il quale uguaglia il numero 2700 moltiplicato per 7 ; per avere tutti i suoi divisori avrebbero dovuto moltiplicarsi i 36 divisori precedentemente ottenuti per 7 , e si sarebbero avuti tutti i divisori di 18900 in numero di 254.

Si sarà avvertito che quando siamo giunti alla moltiplicazione pel fattore semplice 3 considerato la seconda volta, ab-

biamo moltiplicato per 3 solamente quei divisori che avevamo avuti con la moltiplicazione precedente , altrimenti , se non si fosse fatto così, si sarebbero ripetuti gli stessi divisori. Convien dunque notare che ciò dovrà sempre farsi, allorchè bisognerà moltiplicare per un fattore pel quale si sono fatte altre moltiplicazioni.

A R T. III.

Del massimo comun divisore, e del minimo comun dividendo di più numeri.

271. Nel n.° (97) facemmo parola del modo di trovare il massimo comun divisore di due numeri ; ma potrebbe domandarsi in che maniera si troverebbe il massimo comun divisore di più di due numeri. Ciò si fa nel seguente modo.

Se i numeri dati sono tre , si troverà il massimo comun divisore del primo e del secondo, e poi si troverà il massimo comun divisore del terzo e del massimo comun divisore del primo e del secondo , questo massimo comun divisore sarà quello de' tre numeri dati. Sarà comune , perchè dividendo il massimo comun divisore de' primi due numeri dividerà ancora questi numeri ; sarà poi massimo , perchè il più gran divisore de' primi due e del terzo tutt' al più può essere uguale al massimo comun divisore de' primi due, e se non gli è uguale dovrà dividere questo massimo comun divisore n.° (99) ; perciò sarà massimo comun divisore del massimo comun divisore de' primi due e del terzo numero.

Se poi sono quattro, si troverà il massimo comun divisore del quarto numero, e del massimo comun divisore de' primi tre, e questo sarà il massimo comun divisore de' quattro numeri dati ; il che si dimostra come si è fatto per tre nu-

meri. Similmente si procede per trovare il massimo comun divisore di quanti numeri si vogliano.

272. *Per trovare il minimo comun dividendo di più numeri, bisogna trovare tutti i fattori semplici differenti di questi numeri, e formare con essi un prodotto, nel quale ciascuno sia preso come fattore il maggior numero di volte che è preso come tale in quello de' numeri dati, ove entra come fattore il maggior numero di volte.*

Così, per esempio, sia da trovarsi il minimo comun dividendo de' numeri 1176, 180, 5775. Decomponendo ciascuno di questi numeri in fattori semplici, si troverà $1176 = 2.2.2.3.7.7$, $180 = 2.2.3.3.5$, $5775 = 3.5.5.7.11$. Or poichè 2 entra tre volte come fattore in 1176, e 3 entra due volte come fattore in 180, e 7 entra due volte come fattore in 1176, ed 11 entra una volta come fattore in 5775; il minimo comun dividendo cercato sarà perciò il numero $2.2.2.3.3.5.5.7.7.11 = 970200$.

Dim. Esso sarà dividendo comune, perchè si compone di tutti i fattori che sono in ciascuno de' numeri dati; e sarà minimo, perchè non contiene altri fattori oltre quelli necessari onde potersi dividere per tutti i numeri dati; in effetti, se uno de' suoi fattori si sopprimesse, non sarebbe più divisibile per quello de' numeri dati ove il fattore soppresso entra il maggior numero di volte come fattore.

273. Nella nota al n.º (118) si accennò di esservi un metodo diretto per giungere al più semplice denominator comune di più frazioni, allorchè esse debbonsi ridurre al medesimo denominatore; ed in quel numero si fece anche vedere in che modo questa riduzione poteva farsi. La regola in quel luogo prescritta non è in sostanza che la seguente: *Per ridurre più frazioni ad un comun denominatore che sia il più picciolo possibile, converrà dividere il minimo comun dividendo de' loro denominatori per ciascun denominatore, no-*

tare i quozienti, e moltiplicar poi ciascun quoziente per i due termini della frazione a cui appartiene.

Così, per esempio, dovendosi ridurre al medesimo denominatore le frazioni $\frac{23}{1776}$, $\frac{7}{180}$, $\frac{61}{5775}$, si troverà il mini-

mo comun dividendo de' loro denominatori, il quale, come abbiain veduto nel numero precedente, sarà il numero 970200; e dividendo questo numero per i denominatori 1776, 180, 5775 delle frazioni date, si troveranno per quozienti i numeri 3.3.5.11, 2.5.7.7.11, 2.2.2.3.7; e moltiplicando poi i termini di ciascuna frazione pel quoziente rispettivo (cioè moltiplicando i soli numeratori, perchè sappiamo che le moltiplicazioni per i denominatori danno per prodotto il minimo comun dividendo), ne risulteranno le frazioni $\frac{18975}{970200}$, $\frac{37730}{970200}$, $\frac{10248}{970200}$. È facile poi vedere che le

divisioni del minimo comun dividendo trovato per i denominatori delle frazioni si eseguono agevolmente, poichè basta sopprimere i fattori che esso ha di comune col rispettivo denominatore, i quali fattori cadono tutti sotto gl'occhi, per essersi già ritrovati.

274. *Il minimo comun dividendo di più numeri dividerà ogn' altro dividendo comune de' medesimi numeri.*

Difatti, essendosi veduto n.º (272) che il minimo comun dividendo di più numeri si forma da' soli fattori necessari affinchè sia divisibile per ciascuno di essi numeri, ne segue che qualunque altro dividendo comune de' medesimi numeri deve avere in sè tutti i fattori del minimo comun dividendo, altrimenti, se uno solo di questi gli mancasse, non sarebbe più divisibile per tutti i numeri dati, per la stessa ragione che il minimo comun dividendo non sarebbe divisibile per i medesimi numeri se un solo de' suoi fattori si sopprimesse. Dunque se ogni dividendo comune de' numeri dati

ha in sè tutti i fattori del minimo comun dividendo , oltre de' quali può averne anche altri, sarà divisibile pel minimo comun dividendo.

275. Da qui si deduce una regola come trovare il minimo comun dividendo di più numeri in un modo analogo a quello per trovare il massimo comun divisore. Difatti, quando i numeri sono tre , vi si perviene trovando il minimo comun dividendo de' primi due , e poi quello del terzo numero e del minimo comun dividendo de' primi due ; questo minimo comun dividendo che si otterrà sarà quello de' tre numeri dati. Se poi i numeri dati sono quattro , si troverà il minimo comun dividendo del quarto numero e del minimo comun dividendo de' primi tre , e si avrà così quello de' quattro numeri dati. Similmente si procede se i numeri dati fossero più di quattro.

276. Il minimo comun dividendo fra due numeri potrebbe anche trovarsi per mezzo del loro massimo comun divisore, e ciò si consegue dividendo i due numeri dati pel loro massimo comun divisore, e moltiplicando poi il prodotto de' quozienti che ne risultano per lo stesso massimo comun divisore, il risultamento che si ottiene sarà il loro minimo comun dividendo. Difatti , è facile vedere che esso si forma da' soli fattori necessarii onde potersi dividere per i due numeri proposti.

A R T. IV.

Seguito delle frazioni decimali periodiche.

277. Le frazioni $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{99}$, $\frac{1}{999}$, ec. svolte in decimali , vengono rispettivamente uguali alle frazioni decimali periodiche $0,1111\dots$, $0,010101\dots$, $0,001001001\dots$

In effetti , affin di poter ottenere la prima cifra significa-

tiva del quoziente, nell' eseguir le divisioni di 1 per 9, di 1 per 99, di 1 per 999, ec. bisogna aggiungere tanti zeri a dritta del numeratore 1 quanti 9 sono nel denominatore rispettivo; quindi la prima cifra significativa del quoziente, la quale sarà l' unità, comincerà dalla prima, dalla seconda, o dalla terza cifra decimale; secondo che si sono aggiunti uno, due, tre, ec. zeri a dritta del numeratore; e poichè il resto è sempre l' unità, ritorneranno nel quoziente le medesime cifre; e si avranno perciò gli enunciati decimali periodici.

Ritrovare la frazione ordinaria da cui deriva una data frazione decimale periodica.

Se la frazione decimale è periodica semplice, la frazione ordinaria che l' è uguale avrà per numeratore il periodo, e per denominatore la cifra 9 ripetuta tante volte quante sono le cifre di esso periodo.

Se poi è periodica mista, si trasporti la virgola innanzi la prima cifra del periodo, e si trovi la frazione ordinaria corrispondente a questo periodo; poi questa frazione e l'intero che trovasi a sinistra della virgola trasferita si riducano ad un sol numero frazionario, e questo numero si divida per 10, 100, 1000, ec., secondo che il periodo della proposta frazione decimale è di una, due, tre, cifre; ec. il quoziente che si ottiene sarà la frazione ordinaria equivalente alla data decimale periodica.

Dim. Nel 1.º caso: Moltiplicando le frazioni decimali periodiche 0,111..., 0,010101..., 0,001001..., per numeri che abbiamo rispettivamente una cifra, due cifre, tre cifre, ec. scorgiamo facilmente che un decimale periodico il cui periodo è di una cifra pareggia la frazione decimale periodica 0,111... moltiplicata per quella cifra; ed un decimale perio-

dico, il cui periodo è un numero di due cifre, pareggia la frazione decimale periodica $0,010101\dots$ moltiplicata per quel numero di due cifre; ed un decimale periodico, il cui periodo è un numero di tre cifre, pareggia la frazione decimale periodica $0,001001\dots$ moltiplicata per quel numero di tre cifre; e così via discorrendo. Ma poichè le frazioni decimali periodiche $0,111\dots$, $0,010101\dots$, $0,001001\dots$ sono rispettivamente uguali alle frazioni $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{99}$, $\frac{1}{999}$, ne segue che un decimale periodico di una sola cifra pareggia la frazione $\frac{1}{9}$ moltiplicata per quella cifra, cioè pareggia la frazione che ha per numeratore essa cifra e per denominatore 9; ed un decimale periodico, il cui periodo è di due cifre, pareggia la frazione $\frac{1}{99}$ moltiplicata pel detto periodo, cioè pareggia la frazione che ha per numeratore esso periodo e per denominatore 99. Similmente, un decimale periodico, il cui periodo è di tre cifre, pareggia la frazione che ha per numeratore il periodo e per denominatore 999; e così di seguito.

Nel 2° caso. Sia, per esempio, il numero decimale periodico $0,32675675\dots$: trasferendo la virgola avanti la prima cifra del periodo, ne verrà il numero $32,675675\dots$ il quale sarà 100 volte maggiore del proposto; e sostituendo al decimale periodico semplice $0,675675\dots$ la frazione ordinaria $\frac{675}{999}$ da cui esso deriva, si avrà che il numero $32,675675\dots$ viene uguale a $32\frac{675}{999}$; perciò quest' ultimo numero è 100 volte più grande della frazione decimale periodica proposta; laonde, se dividiamo il numero $32\frac{675}{999}$ per 100, la frazione ordinaria $\frac{1209}{3700}$ che ne risulterà sarà uguale alla data frazione decimale periodica.

C A P. II.

ESTRAZIONE DELLA RADICE QUADRATA E CUBICA DA' NUMERI.

A R T. I.

278. Nel n.° (222) avemmo occasione di accennare che cosa fosse il quadrato e la radice quadrata di un numero; ma dovendo ora trattare di proposito dell'estrazione della radice quadrata da' numeri giova ricordare che:

Dicesi *quadrato* di un numero il prodotto che nasce dal moltiplicare il numero per sè stesso, e questo numero si chiama *radice quadrata* di un tal prodotto. Così, per esempio, 64 è il quadrato di 8, e 100 è il quadrato di 10; mentre 8 e 10 sono le rispettive radici quadrate di 64, e 100.

Dicesi poi *cubo* di un numero il prodotto che nasce dal moltiplicare il numero due volte di seguito per sè stesso, e questo numero si chiama *radice cuba* o *cubica* del detto prodotto. Così, per esempio, 27 è il cubo di 3, e 1000 è il cubo di 10; mentre 3 e 10 sono le rispettive radici cubiche di 27 e 1000.

Le denominazioni di quadrato e di cubo si danno solamente a' prodotti di un numero moltiplicato rispettivamente una volta o due volte per sè stesso. In generale poi dicesi *potenza seconda*, *potenza terza*, *quarta*, ec. di un numero, il prodotto che nasce dal moltiplicare il numero rispettivamente una, due, tre volte, ec. per sè stesso, cioè tante volte quante unità men'una sono nel numero che dinota la potenza. Ogni numero poi dicesi *potenza prima* di sè stesso.

Analogamente: dicesi *radice seconda*, *radice terza*, *quarta*, ec. di un numero, quel numero che moltiplicato una, due, tre volte, ec. per sè stesso produce il numero proposto.

Per indicare che un numero deve elevarsi a potenza, si mette al di sopra di esso, dalla parte dritta, un altro numero che *espone* a qual potenza il numero proposto debba elevarsi. Così, per esempio, se i numeri 5, 7, 43 debbansi elevare rispettivamente a potenza seconda, terza, e quarta, ciò si denoterà scrivendo 5^2 , 7^3 , 43^4 , leggendosi *5 elevato a quadrato*, ovvero a *potenza seconda*, *7 elevato a cubo* ovvero a *potenza terza*, *43 elevato a potenza quarta*; ed anche più semplicemente si leggerà *5 elevato a due*, *7 elevato a tre*, *43 elevato a quattro*. Si dà poi il nome di *esponente* a ciascuno de' numeri 2, 3, 4, che indicano le potenze de' numeri 5, 7, e 43.

Per indicare che da un numero deve estrarsi la radice di un certo *grado*, si fa uso del segno $\sqrt{}$ alla cui dritta si mette il numero dal quale deve estrarsi la radice, ed alla sinistra sull'apertura del segno si mette un altro numero che indica il grado della radice da estrarsi. Così, per esempio, per indicare che debba estrarsi la radice *cubica* o *terza* da 27, si scriverà $\sqrt[3]{27}$, e si leggerà *radice cubica* o *terza di 27*. Similmente, per indicare che debba estrarsi la radice *quinta* da 32, si scriverà $\sqrt[5]{32}$, leggendosi *radice quinta di 32*. Bisogna poi avvertire che, trattandosi di radice quadrata, si scrive il solo segno $\sqrt{}$ senza il 2. Così, per esempio, dovendosi estrarre la radice quadrata da 25, si scriverà $\sqrt{25}$.

Noi tratteremo in questo capitolo della sola estrazione delle radici quadrate e cubiche da' numeri, essendo proprio dell'algebra l'occuparsi dell'estrazione delle radici di qualunque grado.

Composizione del quadrato di un numero.

279. *Se un numero sia diviso in due parti, il quadrato di tutto il numero è uguale al quadrato della prima parte, più il doppio prodotto della prima per la seconda, più il quadrato della seconda.*

Sia, per esempio, il numero 35 diviso nelle due parti 30 e 5: dico che $35^2 = 30^2 + 2(30 \times 5) + 5^2$.

In effetti, dovendosi moltiplicare $30+5$ per $30+5$ è lo stesso che moltiplicare $30+5$ prima per 30 e poi per 5; ma $(30+5)30 = 30 \times 30 + 5 \times 30$, e $(30+5)5 = 30 \times 5 + 5 \times 5$; perciò $(30+5)(30+5) = 30 \times 30 + 5 \times 30 + 30 \times 5 + 5 \times 5$; e poichè $5 \times 30 + 30 \times 5$ equivale a due volte il prodotto di 30 per 5; si avrà quindi che $(30+5)^2 = 30^2 + 2(30 \times 5) + 5^2$; cioè il quadrato del numero 35 diviso nelle due parti 30 e 5 si compone del quadrato di 30, del doppio prodotto di 30 per 5, e del quadrato di 5. Lo stesso ragionamento vale per qualunque altro numero che sia diviso in due parti.

Da qui si desume che se un numero contiene decine ed unità, il suo quadrato si compone dal quadrato delle decine, dal doppio prodotto delle decine per le unità, e dal quadrato delle unità.

Inoltre è da osservarsi che il quadrato delle decine non ha cifre di ordine inferiore alle centinaia. Così, per esempio, il quadrato di 3 decine, ossia di 30, è uguale a 9 centinaia, ossia al prodotto di 3 per 3 con due zeri a dritta, che è 900. Per la stessa ragione il prodotto delle decine per le unità non ha cifre significative di ordine inferiore alle decine. Così, per esempio, il prodotto di 3 decine per 5 unità è ugua-

le a 15 decine , ossia al prodotto di 5 per 3 con un zero a dritta, che è 150.

280. Prima d' intraprendere l' estrazione della radice quadrata da' numeri è utile osservare che non tutt' i numeri sono quadrati perfetti, anzi i numeri quadrati perfetti sono assai rari rispetto a quelli non quadrati esatti. Così, per esempio, 25 essendo il quadrato di 5, e 36 il quadrato di 6, fra 25 e 36 vi sono dieci numeri non quadrati perfetti. A misura poi che due numeri interi consecutivi sono di più in più grandi cresce la differenza fra i loro quadrati; sino a divenir grandissima, ed anche maggiore di qualunque numero dato. È facile convincersi di questa verità dando un' occhiata a' quadrati de' numeri semplici , che abbiamo scritti qui appresso in corrispondenza delle loro radici,

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81;

ove si vede che le differenze fra i quadrati formano la serie de' numeri dispari a contar da 3. Questa legge è vera per tutt' i numeri interi. Difatti, indicando con a un qualunque numero intero, il quadrato di $a+1$ essendo a^2+2a+1 , esso differisce dal quadrato di a per $2a+1$: cioè, il quadrato di un numero intero differisce dal quadrato del numero intero immediatamente inferiore pel doppio di questo numero accresciuto dell' unità; perciò questa differenza è un numero dispari. Per la medesima ragione il quadrato di $a+2$ differisce da quello di $a+1$ per $2(a+1)+1$, ossia per $2a+2+1$ che è il numero dispari immediatamente maggiore di $2a+1$.

A R T. III.

Estrazione della radice quadrata da' numeri interi.

281. Dovendosi estrarre la radice quadrata da un numero

intero supporremo primieramente che esso abbia tre o quattro cifre, e sia, per esempio, il numero 5821.

Or poichè la radice quadrata di 100 ha due cifre, il numero proposto essendo maggiore di 100, la sua radice quadrata avrà almeno due cifre, cioè conterrà decine ed unità; dunque nel proposto numero è contenuto il quadrato delle decine della radice, il doppio prodotto delle decine per le unità, ed il quadrato delle unità; ma il quadrato delle decine non ha cifre significative di ordine inferiore alle centinaia, perciò se distacciamo due cifre dalla dritta del numero proposto, nel numero 58 a sinistra sarà contenuto il quadrato delle decine della radice; quindi estraendo la radice quadrata del numero 58, si avranno le decine della radice; ma 58 non essendo quadrato esatto, si estrarrà la radice dal massimo quadrato contenuto in 58, che è 49, e perchè la radice di 49 è 7, saranno dunque 7 le decine della radice cercata.

Ora, (intavolando l'operazione come si vede qui a fianco), se togliamo da 58 il quadrato delle 7 decine, che è 49, ed a dritta del resto 9 abbassiamo le due cifre che avevamo separate dalla dritta del numero proposto, è chiaro che nel numero 921 che ne risulta deve esser contenuto il prodotto del doppio del-

$$\begin{array}{r|l} 58,21 & 76 \\ 49 & 146 \\ \hline 92,1 & 6 \\ 876 & \\ \hline 45 & \end{array}$$

le decine della radice per la cifra delle unità, ed il quadrato delle unità; ma il doppio prodotto delle decine per le unità non ha cifre significative di ordine inferiore alle decine; perciò distaccando una cifra a dritta del numero 921, nel numero 92 a sinistra sarà contenuto il prodotto del doppio delle decine della radice per la cifra delle unità, lapnde dividendo 92 per il doppio delle decine trovate, che è 14, avremo la cifra delle unità; eseguendo la divisione, troviamo che 6 è la cifra delle unità, onde si deduce che 76 è la radice cercata.

Or se facciamo il quadrato delle 6 unità, ed il prodotto

del doppio delle decine per la cifra delle unità , e togliamo questo quadrato e questo prodotto dal numero 921 , finiremo così di togliere dal numero proposto il quadrato della sua radice 76 , perchè prima ne abbiamo tolto il quadrato delle 7 decine, ed ora togliamo dal resto 921 il doppio prodotto delle decine per le unità , ed il quadrato delle unità. Questa moltiplicazione e sottrazione si fa scrivendo la cifra 6 a dritta di 14, che è il doppio delle decine , poi si moltiplica 146 per 6 , ed il prodotto si toglie da 921 ; e poichè si ottiene per resto 45 , ne concludiamo che 5821 non è quadrato perfetto, e quindi 76 è la radice del massimo quadrato contenuto 5821 , e 5821 supera questo massimo quadrato di 45.

282. Se dovesse estrarsi la radice quadrata da un numero di tre cifre, sia questo il numero 729.

Applicando a questo esempio il medesimo ragionamento tenuto nell'esempio precedente , cominciamo dall'osservare che il numero proposto essendo maggiore di 100, la sua radice deve contenere decine ed unità ; perciò nel proposto numero sarà contenuto il quadrato delle decine della radice , il doppio prodotto delle decine per le unità , ed il quadrato delle unità ; ma perchè il quadrato delle decine è contenuto nel numero che rappresenta le centinaia, se distacciamo le due cifre a dritta del numero 729, ed estragghiamo la radice quadrata del numero 7 che sta a sinistra , si avranno così le decine della radice; or poichè il maggior quadrato contenuto in 7 è 4, e la radice di 4 è 2, saranno 2 le decine della radice. Poi si toglierà il quadrato di 2 da 7, ed a dritta del resto 3 si abbasserà la coppia delle cifre che eransi distaccate ; si avrà così il numero 329 in cui sarà contenuto il prodotto del doppio delle decine della radice per la cifra delle unità , ed il quadrato delle unità ; perciò distaccando dalla dritta del detto numero la

$$\begin{array}{r|l}
 7,29 & 27 \\
 4 & \underline{47} \\
 32,9 & 7 \\
 329 & \underline{00} \\
 000 &
 \end{array}$$

cifra 9 delle unità, e dividendo il numero 32 a sinistra pel doppio delle decine, che è 4, si avrà la cifra delle unità.

Ma qui conviene osservare che sebbene 32 diviso per 4 dia per quoziente 8, pure la cifra 8 non si può prendere per cifra delle unità, perchè essa è troppo grande, dovendo la medesima esser tale che moltiplicata per sè stessa è per 4, che è il doppio delle decine, ne risulti un prodotto che non sia maggiore di 329; perciò la cifra 8 si diminuirà di tante unità finchè fatta la detta moltiplicazione si abbia un numero che non sia maggiore di 329: in questo esempio bisogna diminuirla di una sola unità, ond'è che 7 sarà la cercata cifra delle unità. Or poichè moltiplicando 47 per 7, e togliendo il prodotto da 329 non si ottiene alcun resto, ne conchiuderemo che 27 è la radice quadrata esatta dal numero 729.

283. Qui cade anche opportuno far notare che, allorquando si fa la divisione per trovare la cifra delle unità, non vi è bisogno di moltiplicar questa cifra per sè stessa e pel doppio della radice affin di assicurarsi se essa sia la giusta cifra. Difatti, nel nostro esempio dividendo 32 per 4 si ha per quoziente 8, e scritto 8 a dritta di 4 dobbiam poi moltiplicare 48 per 8 per vedere se il prodotto risulti maggiore o minore di 329. Ora ciò non è necessario che si faccia; poichè è facile vedere che il numero 329 può considerarsi come divisore, ed 8 come quoziente; quindi per assicurarsi se la cifra 8 sia giusta possiamo immaginarla scritta a dritta di 4, e nel fare la divisione si dirà: 4 in 32 è contenuto 8 volte senz' avanzo, ma 8 non è contenuto 8 volte in 9, perciò la cifra 8 è troppo grande, quindi essa si diminuisce di un'unità e si prende 7, e si dirà: 4 in 32 è contenuto 7 volte con l' avanzo di 4 che posto avanti a 9 fa 49; il 7 in 49 è pure contenuto 7 volte, dunque 7 è la giusta cifra delle unità.

284. Passiamo ora ad estrarre la radice quadrata da un

numero che abbia più di quattro cifre, ma non più di sei, e sia il numero 763498.

Applicandovi lo stesso ragionamento de' due esempi precedenti, cominceremo dall'osservare che il numero proposto essendo maggiore di 100, la sua radice quadrata contiene decine ed unità, e però nel proposto numero è contenuto il quadrato delle decine della radice, il doppio prodotto delle decine per le unità, ed il quadrato delle unità; ma il quadrato delle decine non ha cifre significative di ordine inferiore alle centinaia, quindi distaccando due cifre dalla dritta del numero proposto, nel numero 7634 a sinistra sarà contenuto il quadrato delle decine della radice; dunque per trovare queste decine bisogna estrarre la radice quadrata dal numero 7634; ma questo numero essendo di quattro cifre sappiamo estrarre la sua radice quadrata, il che effe-

tuandosi come si vede qui a fianco, troveremo che essa è 87. Or poichè tolto il quadrato delle 87 decine della radice da 7634 vi restano 65 decine, se abbassiamo a dritta di questo resto l'altra copia di cifre che forma il numero 98, nel numero 6598 che ne risulta sarà contenuto il doppio prodotto delle decine per la cifra delle unità, ed il quadrato delle uni-

$$\begin{array}{r}
 76,34,98 \quad | \quad 873 \\
 \underline{64} \qquad \qquad \qquad | \quad 167 \\
 123,4 \qquad \qquad \qquad | \quad 7 \\
 \underline{1169} \qquad \qquad \qquad | \quad 1743 \\
 659,8 \qquad \qquad \qquad | \quad 3 \\
 5229 \\
 \underline{1369}
 \end{array}$$

tà; ma perchè il prodotto del doppio delle decine per la cifra delle unità non ha cifre significative di ordine inferiore alle decine, se distacciamo una cifra a dritta del numero 6598, nel numero 659 a sinistra sarà contenuto il prodotto del doppio delle decine per la cifra delle unità; adunque dividendo questo numero pel doppio delle decine trovate che è 174 (e che si ottiene sommando 167 con la cifra 7 che sta al di sotto) il quoziente 3 che ne risulta sarà la cifra delle unità. Or se moltiplichiamo 1743 per 3, cioè se facciamo il quadrato delle 3 unità ed il prodotto del doppio delle decine

per le unità , e togliamo il risultamento che si ottiene dal numero 5229 , finiremo così di togliere dal numero proposto il quadrato della sua radice 873 , perchè prima ne abbiamo tolto il quadrato delle 87 decime , ed ora togliamo dal resto 6598 il doppio prodotto delle decime per le unità , ed il quadrato delle unità. E poichè si ottiene per resto 1369 , ne conchiuderemo che il numero 763498 non è quadrato perfetto ; quindi 873 è la radice del massimo quadrato contenuto in 763498.

285. Se avvenisse che dopo essersi abbassata a dritta di un resto la seguente coppia di cifre del numero proposto , e dopo essersi distaccata la cifra a dritta del numero che n' emerge, il numero a sinistra di questa cifra, il quale deve dividersi pel doppio della radice trovata , risultasse minore di questo doppio , allora la seguente cifra della radice sarà zero, perciò si porrà prima un zero a dritta della radice trovata , e poi si proseguirà l'operazione abbassando la seguente coppia di cifre del numero proposto.

Così , per esempio , dovendosi estrarre la radice quadrata dal numero 95481 , si trova che dopo essersi abbassata a dritta del primo resto zero la coppia di cifre che forma il numero 54 , e dopo distaccata la cifra a dritta , il numero 5 a sinistra il quale deve dividersi per 6 , cioè pel doppio della radice, è minore di 6. Ciò vuol dire che la cifra seguente della radice è zero (cioè la cifra delle unità della radice del numero 954 è zero , quindi la radice del maggior quadrato contenuto in 954 è 30 , ed il numero 54 , che si è ottenuto abbassando le due cifre a fianco al resto

$$\begin{array}{r|l} 9,54,81 & 309 \\ 9 & 609 \\ \hline 05,48,1 & 9 \\ 5481 & \\ \hline 0000 & \end{array}$$

zero , deve riguardarsi come l'avanzo che resta togliendo da 954 il quadrato delle 30 decime della radice ; perciò si porrà un zero a dritta della prima cifra 3 della radice , e poi a fianco al numero 54 si abbasserà la coppia seguente , e di-

staccando la cifra 1 dalla dritta del numero 5481 che ne risulta, nel numero 548 a sinistra sarà contenuto il prodotto del doppio delle 30 decine della radice per la cifra delle unità; dunque, se dividiamo 548 pel doppio delle decine che è 60, il quoziente 9 sarà la cifra delle unità. E poichè moltiplicando 609 per 9, e togliendo il prodotto dal numero 5481 non si ottiene alcun resto, ne concluderemo che 309 è la radice quadrata esatta dal numero 95481.

Ragionando similmente rispetto ad un numero che abbia più di sei cifre, si scorge in generale che :

Per estrarre la radice quadrata da un numero intero, si separeranno le sue cifre in membri, ciascuno di due cifre, cominciando da dritta; perciò, quando il numero delle cifre è dispari, il primo membro a sinistra sarà di una sola cifra. Poi si estrarrà la radice quadrata dal maggior quadrato contenuto nel primo membro a sinistra, e questa radice sarà la prima cifra della radice cercata. Indi il quadrato di questa cifra si toglierà dal detto membro, ed a dritta del resto si abbascerà il membro seguente, e distaccando una cifra dalla dritta del numero che ne risulta, la parte a sinistra si dividerà pel doppio della radice trovata; la cifra che si avrà per quoziente sarà la seconda cifra della radice cercata, purchè scritta a dritta del detto doppio, e moltiplicata pel numero che n' emerge, il prodotto possa togliersi da quel numero che si è ottenuto abbassando il membro a fianco al resto; altrimenti bisogna diminuirlo di tante unità finchè la sottrazione possa eseguirsi. Fatta la sottrazione, si abbascerà a dritta del resto il membro seguente, e si proseguirà l'operazione con lo stesso metodo finchè non siansi abbassati tutti i membri del numero proposto. Se poi abbassando un membro, il numero che deve dividersi pel doppio della radice risulta minore di questo doppio, la seguente cifra della radice sarà zero, perciò si porrà un zero nel luogo che deve occupar questa cifra, si

abbasserà l'altro membro, e si proseguirà l'operazione secondo abbiain detto.

Da questa regola si desume che la radice quadrata di un numero intero avrà tante cifre quanti sono i membri in cui può dividersi il numero dato.

A R T. IV.

Estrazione della radice quadrata dalle frazioni.

286. Dovendosi estrarre la radice quadrata da una frazione, è chiaro che questa radice sarà una frazione che ha per numeratore la radice del numeratore e per denominatore la radice del denominatore: perciò si estrarrà la radice quadrata da una frazione, estraendola dal numeratore e dal denominatore. Così, per esempio, la radice quadrata della frazione $\frac{9}{25}$ sarà $\frac{3}{5}$.

Ordinariamente avviene che il numeratore ed il denominatore della data frazione non sono quadrati perfetti; ciò non ostante uno di essi può rendersi quadrato esatto, moltiplicando i due termini della frazione pel suo numeratore o pel suo denominatore, secondo che vuol rendersi quadrato esatto l'uno o l'altro. Si preferisce di rendere quadrato perfetto il denominatore, perchè allora si conosce meglio come la cercata radice sia compresa fra due numeri consecutivi esprimenti la stessa parte dell'unità. Così, per esempio, volendosi estrarre la radice quadrata dalla frazione $\frac{3}{7}$, rendendo quadrato perfetto il denominatore, l'operazione si riduce ad estrarre la radice dalla frazione $\frac{21}{49}$; ma la radice del maggior quadrato contenuto nel numeratore 21 è 4, e

la radice del denominatore 49 è lo stesso denominatore primitivo 7 ; perciò $\frac{4}{7}$ è la radice del maggior quadrato contenuto nella frazione $\frac{21}{49}$, ossia nella proposta ; quindi è che la radice cercata è compresa fra $\frac{4}{7}$ e $\frac{5}{7}$, cioè fra i due numeri consecutivi 4 e 5 che esprimono *settimi* dell'unità.

A R T. V.

Estrazione della radice quadrata da' numeri per approssimazione , ed incommensurabilità di queste radici.

287. Sia primieramente un numero intero quello da cui vogliasi estrarre la radice quadrata approssimata ; e sia , per esempio, il numero 2 dal quale voglia estrarsi la radice quadrata che differisca dal vero per meno di un millesimo dell'unità.

Si ridurrà l'intero 2 a numero frazionario che abbia per denominatore il quadrato di quel numero che indica il grado di approssimazione ; perciò 2 dovrà moltiplicarsi pel quadrato di 1000, che è 1000000, e sotto il prodotto si dovrà scrivere per denominatore lo stesso quadrato di 1000 ; quindi si avrà $2 = \frac{2000000}{(1000)^2}$, e $\sqrt{2} = \frac{\sqrt{2000000}}{1000}$; ed estraen-

do la radice quadrata dal maggior quadrato contenuto in 2000000, questa radice si troverà uguale a 1414, la quale dovendosi dividere per 1000, si distaccheranno tre cifre decimali dalla sua dritta ; perciò la radice quadrata approssimata di 2 verrà uguale ad 1,414, con un errore minore di 1 millesimo, perchè la radice vera è compresa fra 1,414 ed 1,415. Da qui si desume che :

Per estrarre la radice quadrata approssimata da un qual-

sivoglia numero intero , la quale differisca dal vero per meno di $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, ec. , bisogna aggiungere alla dritta del numero proposto un doppio numero di zeri di quanti ne contiene quel numero che indica il grado di approssimazione ; poi si estrarrà la radice quadrata dal maggior quadrato contenuto nel numero che ne risulta ; e dalla dritta di questa radice si distaccheranno tante cifre decimali quanti zeri contiene il numero che denota l' approssimazione.

288. Se l' approssimazione fosse indicata da un numero diverso da 10 , 100 , 1000 , ec. , allora non si ha il vantaggio di poter dividere la radice del numeratore per quella del denominatore col distaccare un certo numero di cifre dalla dritta della prima radice. Così , per esempio , volendosi estrarre la radice quadrata da 7 che differisca dalla vera per meno di un 94^{mo} dell' unità , bisognerà moltiplicar 7 pel quadrato di 94 , ed indi estrarre la radice quadrata dal maggior quadrato contenuto nel prodotto 61852 che ne risulta , la quale si troverà essere 248 ; poi dovendosi dividere 248 per 94 , bisognerà fare questa divisione con la regola ordinaria , a meno che non ci contentassimo aver espressa la radice sotto forma di frazione spuria ; effettuando la divisione , si avrà la radice quadrata di 7 uguale a $2\frac{60}{94}$ con un errore minore di $\frac{1}{94}$, perchè essa è compresa fra $2\frac{60}{94}$ e $2\frac{61}{94}$.

289. Allorchè si estraе la radice quadrata per approssimazione , volendosi far la correzione all' ultima sua cifra , questa cifra dovrà aumentarsi di una unità , quando il resto è maggiore della radice trovata. Difatti , indicando con a la radice trovata del numero proposto ; poichè dal quadrato di $a + \frac{1}{4}$ tolto il quadrato di a , resta $a + \frac{1}{4}$; e dal numero proposto tolto il quadrato di a , resta un numero maggiore di $a + \frac{1}{4}$, perchè il resto supera la radice a almeno di una unità , ne segue che il numero proposto sarà maggiore del

quadrato di $a + \frac{1}{2}$, quindi la sua radice sarà pure maggiore di $a + \frac{1}{2}$; cioè sarà compresa fra $a + \frac{1}{2}$ ed $a + 1$; e però, se la radice α , che si è trovata, si aumenta di un'unità, si avrà la radice del numero proposto con un errore minore di mezza unità. Così, per esempio, volendosi estrarre la radice quadrata da 4,8 con un errore minore di 1 mezzo millesimo, essa prima di farsi la correzione si trova uguale a 2,190; ma poichè il resto 3900 è maggiore di 2190, l'ultima cifra 0 della radice deve aumentarsi di un'unità, e così la radice del proposto numero, con un errore minore della metà di $\frac{1}{1000}$, sarà uguale a 2,191.

290. Se poi vogliasi estrarre la radice quadrata da una frazione approssimata sino ad un certo grado, si renderà il denominatore quadrato perfetto moltiplicando i suoi due termini per esso denominatore; poi si estrarrà la radice quadrata dal numeratore con quell'approssimazione che si desidera; ed infine questa radice si dividerà per quella del denominatore, cioè per lo stesso denominatore primitivo. Così; volendosi estrarre la radice quadrata da $\frac{3}{7}$ con un errore

minore di 1 millesimo; si avrà $\sqrt{\frac{3}{7}} = \sqrt{\frac{21}{49}} = \frac{\sqrt{21}}{7}$;

ed estraendo la radice quadrata da 21 approssimata sino a' 1000^{mi}, essa verrà 4,582, la quale divisa per 7, si otterrà la cercata radice della frazione uguale a 0,654 con un errore minore di 1 millesimo.

Volendo poi far la correzione all'ultima cifra, conviene estrarre la radice dal numeratore approssimata sino a' 10000^{mi}; il che fatto, si troverà che la radice cercata diviene 0,655, e differisce dal vero per meno della metà di 1 millesimo. La detta correzione può anche farsi senza bisogno di trovare la radice del numeratore con una cifra dippiù, cioè sino a' 10000^{mi}, e senza nè anche fra la correzione

alla cifra de' 1000ⁿⁱ della detta radice; ma basterà osservare se il resto della divisione sia minore della metà del denominatore, e nel solo caso che non è minore dovrà correggersi l'ultima cifra aumentandola di una unità: di che è facile dar ragione. Così, nel nostro esempio, il resto 4 della divisione, non essendo minore della metà di 7, l'ultima cifra 4 della radice della frazione deve aumentarsi di un' unità; perciò la radice trovata 0,655 è in eccesso, e differisce dal vero per meno della metà di 1 millesimo.

291. Sia ora da estrarre la radice quadrata da un numero decimale, sicchè differisca dal vero per meno di $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, ec. dell'unità; e sia, per esempio, il numero 3,52 da cui voglia estrarre la radice quadrata che differisca dal vero per meno di 1 millesimo.

Si scriverà il proposto numero decimale sotto forma di frazione ordinaria; quindi si avrà $3,52 = \frac{352}{100}$. Poi si ren-

derà il denominatore quadrato perfetto del numero che indica il grado di approssimazione, che in questo caso è 1000, aggiungendo tanti zeri alla sua dritta sicchè ne venghi il quadrato di 1000; ma debbono aggiungersi altrettanti zeri anche a dritta del numeratore affinchè la frazione non si alteri, in questo esempio bisogna aggiungerne quattro, e ne verrà la frazione $\frac{3520000}{(1000)^2}$. Indi si estrarrà la radice qua-

drata dal maggior quadrato contenuto in 3520000, la quale si troverà essere 1876; poi dovendosi dividere questa radice per quella del denominatore, che è 1000, ciò si farà distaccando tre cifre decimali dalla dritta della prima radice; perciò la radice approssimata di 3,52 verrà uguale a 1,876, e differirà dal vero per meno di $\frac{1}{1000}$, perchè se si prendesse 1,877, questa sarebbe troppo grande.

Da qui si rileva che: *Per estrarre la radice quadrata da*

un numero decimale che differisca dalla vera per meno di $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, ec. bisogna aggiungere, se occorre, a dritta del numero proposto tanti zeri finchè il numero delle cifre decimali sia quanto è il doppio de' zeri che contiene quel numero che indica il grado di approssimazione. Poi si estrarrà la radice quadrata dal maggior quadrato contenuto nel numero che ne risulta considerato come intero, ed indi si distaccheranno dalla dritta di questa radice tante cifre decimali quanti sono i zeri del numero che indica l'approssimazione.

292. Dalle cose precedenti si desume, che la radice quadrata di un numero non quadrato perfetto è compresa fra due numeri, i quali possono differir fra loro di una quantità tanto piccola quanto a noi piace. Così, per esempio, volendo la radice quadrata di 5 con un errore minore di 1 milionesimo dell'unità, si troverà che essa è compresa fra 2,236067 e 2,236068, cioè fra due numeri che differiscono fra loro per 1 milionesimo; e potendosi anche trovare due numeri fra quali essa sia compresa, differenti fra loro di una quantità minore di qualunque data, potremo allora prendere uno di questi numeri per radice quadrata di 5, senza poter mai trovare la radice esatta di 5. Ma questa importantissima verità, la quale ci mostra di esistere una nuova specie di numeri che non possono da noi esser mai esattamente espressi, sebbene potèssimo assegnare due numeri tanto poco fra loro differenti quanto ci aggrada fra quali i primi siano compresi, conviene che venghi appoggiata su di una rigorosa dimostrazione; e questo è ciò che ora passiamo a fare.

293. *Ogni numero intero che non ha radice espressa da un numero intero, non l'avrà nè anche espressa da un numero frazionario.*

Supponiamo, se mai è possibile, che vi sia un numero frazionario, il quale possa essere la radice esatta di un numero intero che non ha radice espressa da un numero intero; e

supponiamo dippiù che questo numero frazionario sia ridotto a minimi termini : s' indichi poi con a il suo numeratore , e con b il denominatore ; quindi b sarà primo con a .

Ora , se il numero frazionario $\frac{a}{b}$ fosse radice esatta del da-

to numero intero, il suo quadrato $\frac{a^2}{b^2}$ sarebbe uguale a questo

numero intero ; quindi b^2 dividerebbe esattamente a^2 , ossia $a \times a$, dunque anche b dividerebbe il prodotto $a \times a$;

ma b non può dividere questo prodotto , perchè essendo primo con un fattore a , dovrebbe dividere l'altro fattore a del medesimo prodotto , n.º (264) ; ed allora il numero fra-

zionario $\frac{a}{b}$ sarebbe uguale ad un numero intero , il che è

contro l'ipotesi. Perciò è assurdo che un numero intero il quale non ha radice espressa da un numero intero possa averla espressa da un numero frazionario.

294. Le radici quadrate de' numeri non quadrati perfetti diconsi *numeri incommensurabili* o *irrazionali* ; perchè queste radici non hanno alcuna misura comune con l'unità , e quindi non può esprimersi la ragione che le medesime serbano a qualunque altro numero intero o fratto. In effetti, se esistesse una parte anche picciolissima dell'unità , che presa un numero intero di volte indicato da n producesse esattamente l'unità , e presa anche un numero intero di volte indicato da m producesse esattamente la radice di un numero non quadrato perfetto ; allora questa radice sarà uguale alla parte n -esima dell'unità presa m volte, cioè verrà uguale alla frazione $\frac{m}{n}$, il che abbiamo dimostrato esserè impossibile.

Facciamo non pertanto osservare che , quantunque le radici quadrate de' numeri non quadrati perfetti sieno irrazionali con qualunque numero intero o fratto , possono poi es-

sere *razionali* con un numero della medesima loro natura. Così, per esempio, la radice quadrata di 18 è tripla della radice quadrata di 2; Difatti $\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\frac{18}{2}} = \sqrt{9} = 3$.

Così pure la radice quadrata di 18 è razionale con quella di $4\frac{1}{2}$, e la radice di 2 con quella di 8; in effetti

$$\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{4\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{18}{4\frac{1}{2}}} = \sqrt{4} = 2; \text{ e } \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{8}} = \sqrt{\frac{2}{8}} = \sqrt{\frac{1}{4}} = \frac{1}{2}.$$

Quindi si scorge che un numero irrazionale della classe delle radici quadrate può essere razionale con altri infiniti numeri irrazionali della medesima classe. Difatti, tutte le radici quadrate de' numeri che sono multipli o summultipli del quadrato del dato numero irrazionale indicati da un numero quadrato esatto, sono razionali col dato numero irrazionale.

ART. VI.

Composizione del cubo di un numero.

295. *Se un numero sia diviso in due parti, il cubo di tutto il numero è uguale al cubo della prima parte, più il triplo quadrato della prima moltiplicato per la seconda, più il triplo quadrato della seconda moltiplicato per la prima, più il cubo della seconda parte.*

Sia, per esempio, il numero 47 diviso nelle due parti 40 e 7. Dico che si avrà $47^3 = 40^3 + 3(40^2 \times 7) + 3(40 \times 7^2) + 7^3$.

Difatti, per avere il cubo di $40+7$ dovendo moltiplicarsi $40+7$ due volte per se stesso, moltiplicando prima $40+7$ per $40+7$ il prodotto sarà $40^2 + 40 \times 7 + 40 \times 7 + 7^2$; e moltiplicando poi questo prodotto per $40+7$, si otterrà $40^3 + 40^2 \cdot 7 + 40^2 \cdot 7 + 40 \cdot 7^2 + 40 \cdot 7^2 + 40 \cdot 7^2 + 7^3$; ma poichè in questo prodotto è ripetuta tre volte la parte

$40^2 \cdot 7$ e la parte $40 \cdot 7^2$, esso si riduce a quello enunciato, cioè a $40^3 + 3(40^2 \times 7) + 3(40 \times 7^2) + 7^3$.

Da qui si rileva che, se un numero contiene decine ed unità, il suo cubo si compone dal cubo delle decine, dal triplo quadrato delle decine moltiplicato per le unità, dal triplo quadrato delle unità moltiplicato per le decine, e dal cubo delle unità. Inoltre, è da osservarsi che il cubo di un numero che rappresenta decine sarà un numero che dinota migliaia. Così, per esempio, il cubo di 4 decine, ossia di 40, è uguale a 64 migliaia, cioè al cubo di 4 con tre zeri a dritta. Per la medesima ragione il prodotto del quadrato di un numero che rappresenta decine per un numero che esprime unità sarà un numero che dinota centinaia. Così, per esempio, il quadrato di 4 decine essendo 16 centinaia, moltiplicato per 7 unità, darà per prodotto il numero 112 che rappresenta centinaia.

296. Analogamente a quel che dicemmo per i quadrati de' numeri, conviene osservare che non tutt' i numeri sono cubi perfetti. Così, per esempio, 27 essendo il cubo di 3, e 64 il cubo di 4, fra 47 e 64 esistono 36 numeri interi non cubi perfetti. Ed a misura che due numeri interi consecutivi sono di più in più grandi, cresce la differenza fra i loro cubi sino a divenir grandissima, ed anche maggiore di qualunque numero dato. Ci convinceremo di questa verità dando un' occhiata a' cubi de' dieci primi numeri che abbiamo scritti qui appresso in corrispondenza delle loro radici,

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10

1, 8, 27, 64, 125, 216, 343, 512, 729, 1000.

E qui anche osserviamo, avverarsi quello che osservammo rispetto a' quadrati, cioè, che le differenze fra i cubi de' numeri interi consecutivi sono numeri dispari, ma non sono i numeri dispari successivi come quelle fra i quadrati de' medesimi numeri, perchè esse differiscono del sestuplo del

numero intermedio a'tre numeri a cui si riferiscono. Difatti, indicando con a un qualunque numero intero, il consecutivo essendo $a+1$, il suo cubo sarà a^3+3a^2+3a+1 che differisce dal cubo di a per $3a^2+3a+1$, ossia per $3a(a+1)+1$: quindi la differenza fra i cubi di due numeri interi successivi è uguale al triplo prodotto di essi numeri accresciuto dell'unità. Questa differenza è dispari, perchè se a è pari, $3a$ sarà pure pari, ed il prodotto di $3a$ per $a+1$ sarà anche pari; adunque aggiungendo a questo prodotto l'unità, il numero che ne risulterà sarà dispari. Se poi a è dispari, $a+1$ è pari, e moltiplicato per $3a$ darà un prodotto anche pari, a cui aggiunta l'unità, il risultato sarà dispari. Or poichè si è veduto che la differenza fra il cubo di a ed il cubo di $a+1$ è $3a(a+1)$, quella fra la differenza de' cubi di a ed $a+1$, e la differenza de' cubi di $a+1$ ed $a+2$ sarà

$$3(a+1)(a+2)+1-3a(a+1)-1=3(a+1)(a+2)-3a(a+1)=3(a+1)(a+2-a)=3(a+1)2=6(a+1);$$

cioè, la differenza fra le differenze de' cubi di tre numeri interi consecutivi è sestupla del numero intermedio.

A R T. VII.

Estrazione della radice cubica da' numeri.

297. Primieramente il numero da cui vogliasi estrarre la radice cubica non abbia più di sei cifre, e sia il numero 83453.

Or poichè la radice cubica di 1000 ha due cifre, il numero proposto essendo maggiore di 1000, la radice cubica contiene decine ed unità; quindi nel proposto numero sarà contenuto il cubo delle decine della radice, più il triplo quadrato delle decine moltiplicato per le unità, più il triplo quadrato delle unità moltiplicato per le decine, più il cubo

delle unità; ma il cubo delle decine non ha cifre significative di ordine inferiore alle migliaia, adunque se distacciamo tre cifre dalla dritta del numero proposto, nel numero 83 a sinistra sarà contenuto il cubo delle decine della radice, quindi estraendo la radice cubica da 83 si avranno le decine della radice; ma 83 non essendo cubo perfetto si estrarrà la radice cubica dal maggior cubo contenuto in 83 che è 64, il quale sappiamo essere il cubo di 4; perciò 4 saranno le decine della radice cercata.

Ora (disponendo l'operazione come si vede qui di contro), se togliamo da 83 il cubo delle 4 decine ed accanto al resto 19 abbassiamo le tre cifre che avevamo distaccate, nel numero 194 che ne risulta sarà contenuto il prodotto del triplo quadrato delle decine per le unità, più il triplo quadrato delle unità moltiplicato per le decine, più il cubo delle unità; ma il prodotto del triplo quadrato delle decine per le unità non ha cifre significative di ordine inferiore alle centinaia, dunque distaccando due cifre dalla dritta del numero 19453, nel numero 194 a sinistra sarà contenuto il prodotto del triplo quadrato delle decine per la unità; perciò se dividiamo 194 per 48 che è il triplo quadrato delle decine, il quoziente 4 che si ottiene sarà la cifra delle unità; ma, per assicurarsi se questa sia giusta o troppo grande, bisogna fare il cubo di 44 e vedere se esso risulti maggiore di 83453, e poichè ne risulta il numero 85184 che è maggiore, allora si diminuisce la cifra 4 di tante unità finchè il detto cubo non sia maggiore di 83453; in questo esempio basta diminuirlo di una sola unità, perchè, fatto il cubo di 43, si avrà il numero 79507 il quale non è maggiore di 83453; e poichè tolto 79507 da 83453 si ottiene per resto 3946, ne conchiuderemo che il numero proposto non è cubo perfetto, e quin-

$$\begin{array}{r|rr}
 83,453 & 43 & 43 \\
 64 & - & 43 \\
 \hline
 194,53 & 48 & 129 \\
 & & 172 \\
 834\ 53 & & 1849 \\
 795\ 07 & & 43 \\
 \hline
 39\ 46 & & 5347 \\
 & & 7396 \\
 & & \hline
 & & 79507
 \end{array}$$

di 43 è la radice del maggior cubo contenuto in 83453, e questo numero supera il cubo di 43 per 3946.

Si può osservare che affin di eseguire la divisione per 48 non è necessario abbassare le tre cifre che eransi distaccate, ma è sufficiente abbassare la sola cifra 4, e così dividere il numero 194 per 48.

208. Se poi dovesse estrarsi la radice cubica da un numero maggiore di sei cifre, ma che non abbia più di nove, come, per esempio, dal numero 189119224, si ragionerebbe similmente, cioè si dirà:

Il numero proposto essendo maggiore di 1000, la sua radice cubica conterrà decine ed unità; perciò distaccando tre cifre dalla sua dritta, nel n.° 189119 a sinistra sarà contenuto il cubo delle decine della radice; adunque per trovar queste decine bisogna estrarre la radice cubica dal numero 189119; ma questo numero avendo sei cifre sappiamo estrarne la radice cubica, il che effet-

tuandosi (disponen-	189,119,224	574	57	57
do l'operazione co-	125		57	3
me si vede qui a fian-	641	75	399	1714
co), troveremo che			285	4
essa è 57; e poichè	189119		3249	6856
togliendo il cubo di	185193		57	4
57 da 189119 si ot-	39262	9747	22743	27424
tiene per resto 3926,			16245	
se abbassiamo a drit-			185193	185193000
ta di questo resto la				3898800
prima delle tre ci-				27424
fre che eransi distac-				189119224
cate, nel numero				

39262 che ne risulta sarà contenuto il prodotto del triplo quadrato delle decine per la cifra delle unità; perciò, se dividiamo questo numero per 9747 che è il triplo quadrato delle 57 decine, il quoziente 4 che si ottiene sarà la cifra delle unità, la quale bi-

sognerà verificare se sia giusta facendo il cubo di 574. Ma quest' ultimo cubo (siccome non vi è bisogno in seguito di alcun altro triplo quadrato, perchè nessun' altra divisione deve farsi), si formerà aggiungendo al cubo delle decine, che sappiamo essere 185193000, il prodotto del triplo quadrato delle decine per le unità (che è 38988000, e si ottiene moltiplicando 974700 per le 4 unità), ed aggiugnendovi anche il prodotto del triplo delle decine pel quadrato delle unità, ed il cubo delle unità, i quali ultimi numeri si ottengono unitamente scrivendo 4 a dritta di 171 che è il triplo delle decine, e moltiplicando il numero 1714 che n' emerge due volte di seguito per le 4 unità; sommando poi i tre numeri 185193000, 3898800, 27424, si avrà il cubo della radice cercata, il quale trovandosi uguale al numero proposto, ne segue che il numero 574 è la radice cubica esatta del numero 189119224.

Similmente si ragionerebbe per estrarre la radice cubica da un numero che abbia più di nove cifre, ed è facile scorgere che, analogamente a quel che fu detto per la radice quadrata, se nel corso dell' operazione avvenisse che abbassando affianco ad un resto la prima cifra del membro seguente, il numero che ne risulta fosse minore del triplo quadrato della radice trovata pel quale esso deve dividersi, allora la seguente cifra della radice sarà zero, perciò bisognerà porre prima un zero a dritta della detta radice, e poi, affin di proseguire l' operazione, si abbasseranno le altre due cifre del detto membro insieme con la prima cifra del membro seguente. Da qui si desume la seguente regola generale:

Per estrarre la radice cubica da un numero intero, si separeranno le sue cifre in membri ciascuno de' quali contengano tre cifre, cominciando dalla dritta, perciò il primo membro a sinistra potrà avere una sola cifra; ed anche due. Poi si estrarrà la radice cubica dal maggior cubo contenuto nel pri-

mo membro a sinistra, e questa radice sarà la prima cifra della radice cercata. Indi il cubo di questa cifra si toglierà dal detto membro, a dritta del resto si abbasserà la prima cifra del membro seguente, ed il numero che ne nasce si dividerà pel triplo quadrato della radice trovata; la cifra che si avrà per quoziente sarà la seconda cifra della radice cercata, purchè facendosi il cubo del numero rappresentato da queste due prime cifre della radice, lo stesso possa togliersi da' due primi membri del numero proposto; altrimenti la predetta cifra si diminuirà di tante unità finchè la sottrazione possa eseguirsi. Fatta la sottrazione, si abbasserà a dritta del resto la prima cifra del membro seguente, ed il numero che n' emerge si dividerà pel triplo quadrato della radice trovata, e si proseguirà l'operazione con lo stesso metodo, finchè siansi abbassate tutte le cifre del numero proposto. Se poi abbassando la prima cifra di un membro, il numero che deve dividersi pel triplo quadrato della radice trovata risulta minore di questo triplo, la seguente cifra della radice sarà zero; perciò si porrà la cifra zero in suo luogo, e si abbasseranno le altre due cifre del detto membro insieme con la prima cifra del membro seguente, e si proseguirà l'operazione come abbiám detto di sopra.

299. Se voglia estrarsi la radice cubica da una frazione, si renderà il denominatore cubo perfetto, moltiplicando i suoi due termini pel quadrato del denominatore, e poi si estrarrà la radice cubica da' due termini della frazione che ne risulta. Così, per esempio, volendosi estrarre la radice cubica dalla frazione $\frac{50}{125}$, si moltiplicheranno i suoi due termini per 25, e ne verrà la frazione $\frac{50}{125}$ uguale alla proposta; perciò l'operazione si riduce ad estrarre la radice cubica della frazione $\frac{50}{125}$, il numeratore della quale non essendo cubo perfetto, estrarremo la radice dal maggiore cubo contenuto in esso, che è 27; quindi si avrà che la radice del

maggior cubo contenuto nella frazione proposta è $\frac{3}{5}$; e però la radice cubica della frazione $\frac{3}{5}$ è compresa fra $\frac{3}{5}$ e $\frac{4}{5}$.

A R T. VIII.

Estrazione della radice cubica per approssimazione.

300. Se voglia estrarsi la radice cubica approssimata da un numero intero che non è cubo perfetto, per esempio da 2, e questa si voglia con un errore minore di una certa parte dell'unità, per esempio di $\frac{1}{60}$ dell'unità. Si moltiplicherà 2 pel cubo di 60, e si avrà per prodotto 432000; poi si estrarrà la radice cubica del maggior cubo contenuto in questo numero, la quale si troverà uguale a 75; indi questa radice si dividerà per 60, ed il quoziente $1 \frac{15}{60}$ che si otterrà sarà la cercata radice cubica di 2 differente dal vero per meno di $\frac{1}{60}$, perchè essa è compresa fra $1 \frac{15}{60}$ ed $1 \frac{16}{60}$. La ragione di questo modo di operare è consimile a quella data nel n.º (287) rispetto alla radice quadrata.

Se poi l'approssimazione si voglia in 10^m , 100^m , 1000^m , ec., allora basterà aggiungere a dritta del numero proposto tanti terni di zeri quanti ne contiene il numero che indica il grado di approssimazione. Così, per esempio, volendosi estrarre la radice cubica da 9 con un errore minore di $\frac{1}{1000}$, si aggiungeranno a dritta di 9 tre terni di zeri, e però dovrà estrarsi la radice cubica da 9000000000, la quale si troverà essere 2080; e dovendosi poi questa radice dividere per 1000, eseguendo la divisione, si troverà che la radice cubica di 9, con un errore minore di $\frac{1}{1000}$, è uguale a 2,080.

301. Dovendosi estrarre la radice cubica da una frazione, come per esempio della frazione $\frac{3}{5}$ con un errore minore di $\frac{1}{1000}$, si moltiplicheranno i suoi due termini pel quadrato del denominatore; così l'operazione si ridurrà ad estrarre

la radice cubica dalla frazione $\frac{50}{125}$. Perciò si estrarrà la radice cubica dal numeratore 50 con un errore minore di $\frac{1}{1000}$, e questa si troverà uguale a 3,684; indi questa radice si dividerà per la radice cubica del denominatore la quale pareggia lo stesso denominatore primitivo 5. Si otterrà così la radice cubica di $\frac{2}{5}$ uguale a 0,736 con un errore minore di $\frac{1}{1000}$. La ragione di questo modo di operare è analoga a quella del n.º (290) riguardante la radice quadrata.

302. Volendosi poi estrarre la radice cubica da un numero decimale, si renderà il suo denominatore cubo esatto di quel numero che indica il grado di approssimazione con ridurre le sue cifre decimali a tre, a sei, a nove, ec., secondo che l'approssimazione si voglia con un errore minore di $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, ec.; poscia si estrarà la radice cubica dal numero che ne risulta considerato come intero; ed infine si distaccheranno dalla dritta di questa radice tante cifre decimali quanti zeri contiene il numero che indica il grado di approssimazione. Così, per esempio, volendosi estrarre la radice cubica da 5,34 con un errore minore di $\frac{1}{100}$; si aggiungeranno quattro zeri alla dritta del numero proposto, affinchè le sue cifre decimali si riducano a sei; quindi dovrà estrarsi la radice cubica dal maggior cubo contenuto in 5340000, la quale si troverà essere 174, e divisa poi per 100, si avrà che la radice cubica del numero proposto viene uguale a 1,74 con un errore minore di $\frac{1}{1000}$.

303. Riguardo alle radici cubiche de' numeri non cubi perfetti avviene un fatto analogo a quello che si avvera rapporto alle radici quadrate, cioè, *le radici cubiche de' numeri non cubi perfetti sono incommensurabili.*

Difatti, se mai esistesse un numero frazionario che possa essere la radice cubica esatta di un numero intero non cubo perfetto, supponendo questo numero frazionario ridotto a minimi termini, ed indicando con a il numeratore, e con b

il denominatore , il suo cubo $\frac{a^3}{b^3}$ sarebbe uguale al proposto numero intero ; perciò b^3 dividerebbe esattamente a^3 , e quindi anche b dividerebbe a^3 , ossia $a \times a^2$; ma b per ipotesi è primo con a , dunque dovrà dividere a^2 ossia $a \times a$, e perciò dividerebbe anche a , il che è contro l'ipotesi.

C A P. III.

APPROSSIMAZIONI NUMERICHE.

304. Questo capitolo ha per oggetto il modo di abbreviare i calcoli quando il risultato deve avere un certo grado di approssimazione ; ed anche di conoscere qual sia il grado di approssimazione di un risultamento proveniente da operazioni eseguite su numeri , i quali erano essi medesimi approssimati.

A R T. I.

305. In questo articolo parleremo della maniera di abbreviare i calcoli , quando i numeri su i quali si opera essendo esatti , il risultato deve avere un certo grado di approssimazione.

Metodo abbreviativo per l'addizione.

306. Allorchè debbono addizionarsi più numeri, e questi non sono più di dieci, la ritenuta della somma delle unità di un certo ordine non potrà influire che di una sola unità nella somma delle unità dell'ordine antiprecedente. Così , per esempio , la ritenuta della somma delle unità semplici, può influire a far crescere di una sola unità la somma della co-

lonna delle centinaia ; e perciò se l'addizione cominciasse dalla colonna delle decine , la cifra delle centinaia può esser mancante di una sola unità per essersi trascurata l'addizione delle unità semplici.

Difatti addizionando la colonna delle unità semplici, non possono ritenersi tutt' al più che 9 decine , ed addizionando poi la colonna delle decine può aversi una somma che esprimerà centinaia e decine , alla quale aggiunte le 9 decine ritenute dalla somma delle unità semplici, questa aggiunta potrà portare nelle centinaia un aumento di un sol centinaio e non più.

Dunque tutte le volte che bisogna addizionare più numeri, e questi non sono più di dieci , se il risultato si voglia con un errore minore di mezza unità di un certo ordine , sarà sufficiente cominciar l'addizione dalla seconda colonna a dritta di quella corrispondente all'ordine di approssimazione , e dopo si disprezzeranno le due cifre a dritta della somma ottenuta, correggendo con la regola del n.º(175) la cifra corrispondente all'ordine di approssimazione. Così, per esempio, nella somma scritta qui a fianco, volendosi il risultato con un errore minore di $\frac{1}{100}$. Si comincerà l'addizione della colonna de' diecimillesimi , e si avrà per somma 16,3698; e disprezzando le cifre 9 ed 8, la somma cercata sarà 16,37 con un errore minore della metà di un centesimo.

3,45236
2,30597
0,27839
4,82076
6,51268
16,3698

Evvi non pertanto un'osservazione a fare quando nella somma la cifra a dritta di quella corrispondente all'ordine di approssimazione fosse 9 ovvero 4 , come avviene nel nostro esempio ove si trova esser 9 ; poichè in tal caso la ritenuta della colonna dei centomillesimi potendo far aumentare di un'unità la cifra 9 de' millesimi (ciò che in effetti si verifica) , la cifra 9 diviene zero , e la cifra de' centesimi

diviene 7 , come si era ottenuta dopo fatta la correzione ; ma allora il risultato ci sembrava in eccesso, mentre in realtà è in difetto. Ciò non ostante , l' errore è sempre minore della metà di $\frac{1}{100}$, anzi è minore di $\frac{1}{1000}$, per esser divenuta zero la cifra de' millesimi.

Che se poi la cifra a dritta di quella corrispondente all' ordine di approssimazione fosse 4 , come si vede nell' esempio qui a fianco, allora la ritenuta trascurata della somma della colonna de' centomillesimi potendo produrre l' aumento di un' unità nella cifra 4	96,2846
	54,7316862
	28,1403685
	13,2926867
	0,1203986

de' millesimi (come di fatti succede nell' esempio addotto) , la cifra 4 divenendo 5 , ne segue che nel farsi la correzione alla cifra 8 , questa cifra diviene 9 , e l' errore è in eccesso , ed è minore della metà di $\frac{1}{100}$; mentre non tenendo conto della ritenuta della colonna de' centomillesimi si ha un risultato con un errore in difetto , e sembra inoltre che l' errore sia minore della metà di $\frac{1}{100}$, il che non è , perchè esso è maggiore della metà di $\frac{1}{100}$; pur tuttavia possiamo riguardarlo come uguale alla metà di $\frac{1}{100}$, poichè esso supera la metà di $\frac{1}{100}$ di una quantità minore della decima parte di $\frac{1}{100}$, ossia minore di $\frac{1}{1000}$. Difatti tutte le cifre disprezzate a dritta della cifra 5 de' millesimi fanno meno di $\frac{1}{1000}$, n.° (159). Dunque si può conchiudere che nel solo caso in cui la cifra a dritta di quella corrispondente all' ordine di approssimazione fosse 4 , può avvenire che l' errore è maggiore di una mezza unità del detto ordine ; nulladimeno , per l' addotta ragione , anche in tal caso può riguardarsi come uguale a mezza unità di quest' ordine.

Metodo abbreviativo per la moltiplicazione.

307. Sia da moltiplicarsi 42,1345869 per 3797389 , richiedendosi che il prodotto differisca dal vero per meno dalla metà di 1 diecimillesimo.

N. B. In questo articolo supporremo sempre che il moltiplicatore non abbia più di dieci cifre.

Si scriverà il moltiplicatore , come si vede qui a fianco , con le cifre in ordine rovescio , facendo cadere quella delle unità sotto quella de' milionesimi del moltiplicando , cioè *due* posti a dritta della cifra del moltiplicando che corrisponde all'ordine di approssimazione. Poi cominceremo dal moltiplicare la cifra de' milionesimi del moltiplicando per quella delle unità del moltiplicatore, e ciò per avere il prodotto parziale espresso in milionesimi, affinchè poi nel fare la somma de' prodotti parziali , cominciandosi da' milionesimi, non possa essere errore nella somma della colonna de' decimillesimi. Ma nel fare la moltiplicazione della cifra 6 de' milionesimi per 3 aggiungeremo al prodotto la ritenuta proveniente dal moltiplicare per 3 la cifra 9 de' diecimilionesimi , cioè la *terza* cifra a dritta di quella corrispondente all'ordine di approssimazione; e ciò affinchè la cifra de' milionesimi del prodotto parziale non possa esser mancante che di una sola unità, per la ritenuta trascurata la quale deriverebbe dal moltiplicare per 3 la cifra di ordine inferiore a' diecimilionesimi (*). È chiaro

42,1345869
9837973
126403760
29494210
3792112
294941
12640
3370
378
160,001411

(*) Nel nostro esempio il moltiplicando non avendo cifre di ordine inferiore a' decimilionesimi, non può esservi alcun errore dipendente da questa considerazione nella cifra de' milionesimi del primo prodotto parziale.

poi che se si fosse tenuto conto di tal ritenuta , nell' addizionare la colonna de' milionesimi , la somma potrebbe avere tante unità di più quanti sono i prodotti parziali ; ma ciò non può influire che a far crescere di una sola unità la somma della colonna de' centomillesimi.

Da qui si scorge che , nella somma cercata , la cifra de' centomillesimi potrebbe avere un' unità di più , oltre un' altra unità che anche potrebbe avere di più per la ritenuta trascurata dal non essersi cominciata l' addizione della colonna dei diecimilionesimi , e perciò potrebbero darsi de' casi (quantunque molto rari) in cui nella somma cercata la cifra a dritta di quella corrispondente all' ordine di approssimazione si trovasse mancata di due unità , il che , quando questa cifra è 3 o 4 , potrebbe portare un errore nella correzione , in modo che il risultamento invece di differire dal vero per meno di mezza unità , ne differirebbe di una quantità maggiore , ma tanto poco maggiore che può considerarsi come uguale a mezza unità , per quel che abbiamo osservato nel numero precedente (*).

Cominciando dunque la moltiplicazione , si dirà : 9 per 3 fanno 27 , la cifra 7 non si scrive , e si tien conto della

(*) Allorchè la cifra a dritta di quella corrispondente all' ordine di approssimazione è 3 o 4 , e le ritenute trascurate influiscono su di essa di 2 unità , pel doppio riguardo che abbiám detto di sopra (la quale cosa non può avvenire che nel solo caso in cui nella somma ottenuta la seconda cifra a dritta di quella corrispondente all'ordine di approssimazione è 9) ; si avrà che l'errore supera una mezza unità del detto ordine di una quantità che può riguardarsi come uguale ad 1 decimo di questa stessa unità quando la cifra è 4 ; per la ragione che la cifra 4 diviene 6 e la cifra 9 diviene zero. Quando poi la cifra è 3 , l' errore , per la medesima ragione , può riguardarsi come uguale giusto a mezza unità dell' ordine accennato.

sola ritenuta 2; poi si dirà: 8 per 3 fanno 18, e 2 si di ritenuta fanno 20; ora si comincia a scrivere il prodotto parziale, perciò si scrive 0 e si porta 2; e continuando la moltiplicazione si otterrà per prodotto parziale il numero 126403760 che rappresenta milionesimi. Poi si passerà a fare il prodotto parziale del moltiplicando per la cifra 7 de' decimi del moltiplicatore; e poichè nel prodotto non si vogliono cifre di ordine inferiore a' milionesimi, si comincerà la moltiplicazione della cifra 8 de' centomillesimi del moltiplicando, perchè il moltiplicatore parziale rappresentando unità dieci volte minori di quelle rappresentate dal precedente, deve moltiplicarsi per un numero che esprime unità dieci volte maggiori, affinchè il prodotto parziale rappresenti le stesse unità del prodotto parziale precedente. Inoltre, per la medesima ragione detta più sopra, aggiungeremo al prodotto di 8 per 7 la ritenuta proveniente dal moltiplicare la cifra 6 del moltiplicando per la cifra 7 del moltiplicatore; e così si otterrà per prodotto parziale il numero 29494210 che esprime milionesimi, esso perciò si scriverà al di sotto del prodotto parziale precedente in modo che le unità dello stesso ordine corrispondano in una medesima colonna. Similmente si passerà a fare il prodotto parziale del moltiplicando per la cifra 9 de' centesimi del moltiplicatore, ed affinchè il prodotto esprimesse milionesimi, cominceremo la moltiplicazione dalla cifra 5 de' diecimillesimi del moltiplicando, tenendo anche conto della ritenuta proveniente dal moltiplicare la cifra 8 de' centomillesimi del moltiplicando per la cifra 9 del moltiplicatore; ciò fatto, si ottiene per prodotto il numero 3792112 che pure esprime milionesimi. Seguendo dello stesso modo, si otterranno tutti i prodotti parziali, i quali addizionati danno per somma il prodotto totale 160,001411; e disprezzando le due ultime cifre a dritta di questo numero, le quali perciò sono segnate con un

punto al di sopra , si otterrà il prodotto cercato uguale a 160,0114 con un errore minore della metà di un decimillesimo (*).

308. Sia per 2.^o esempio da moltiplicarsi 23,920756951 per 493,273 , ed il prodotto si voglia con un errore minore di un millesimo. Per le ragioni addotte nel numero precedente, bisognerà scrivere il moltiplicatore in modo che la cifra delle unità cada sotto quella de' centomillesimi del moltiplicando , rovesciando sempre l'ordine delle sue cifre , come si vede qui di contro. Poi si comincerà dal moltiplicare la

	23,920756951
	372394
cifra 9 del moltiplicando che sta sulla cifra 4 a dritta del moltiplicatore per questa cifra del moltiplicatore , aggiungendo al prodotto anche la ritenuta proveniente dal moltiplicar la cifra 5 del moltiplicando per la medesima cifra 4 del moltiplicatore, ed il prodotto 956830278 esprimerà centomillesimi ; poichè, se la cifra 4 del moltiplicatore rappresentasse unità, il prodotto rappresenterebbe decimilionesimi , ma essa rappresentando centinaia , cioè unità 100 volte maggiori, il prodotto sarà pure 100 volte maggiore , e però dinoterà centomillesimi. Quindi è facile vedere che tutti gli altri prodotti parziali formati con la stessa legge dell' esempio precedente esprimeranno centomillesimi ; e perciò dalla loro somma che è 1179946351 distaccando cinque cifre decimali, si avrà per prodotto il numero 11799,46351 , dalla cui dritta sopprimendo le cifre 5 ed 1 con la solita regola , si avrà il prodotto cercato uguale a	956830278
	215286812
	7176226
	478415
	167444
	7176

11799,46351

(*) Facciamo notare che se volesse trovarsi il prodotto secondo la regola prescritta da Bourdon nella sua Aritmetica, cioè cominciando la moltiplicazione della cifra del moltiplicando a dritta di quella corrispondente all'ordine di approssimazione , e tenendo conto della ritenuta proveniente dalla seconda , e non già dalla terza cifra a dritta della medesima , non avremmo potuto

11799,464 con un errore minore della metà di 1 millesimo.

309. Se poi il moltiplicando non avesse un sufficiente numero di cifre onde poter situare le unità del moltiplicatore due posti a dritta della cifra del moltiplicando corrispondente all'ordine di approssimazione, allora si aggiungeranno tanti zeri a dritta del moltiplicando quanti se ne richiegono per poter eseguire l'operazione secondo vien prescritto dalla regola. Così, per esempio, dovendosi moltiplicare 831,6437 per 96,85473, e volendosi il prodotto con un errore minore della metà di un diecimillesimo; si scriveranno i due fattori come si vede qui

831,6437000
3745869
74847933000
4989862200
665314960

di contro, ed eseguendo l'operazione si otterrà per risultato il numero 80548,6260, il quale differisce dal vero per meno della metà di un diecimillesimo.

310. Si potrebbe parimenti domandare il prodotto di due numeri interi espresso in unità di un certo ordine. Così, per esempio, dovendosi moltiplicare 68394 per 85312, e volendosi conoscere i diversi ordini di unità del prodotto dalle centinaia di migliaia in

41582185
3326574
582150
24949
80548,626018

sopra, si rovescerà l'ordine delle cifre del moltiplicatore, e si scriverà al di sotto del moltiplicando in modo che la cifra delle sue unità cada sotto quella delle migliaia del moltiplicando. Poi si eseguirà la moltiplicazione con la stessa legge degli esempi precedenti, e si otterrà per prodotto il numero 58348, che rappresenta centinaia di migliaia, e differisce dal vero per meno della metà di un centinaio di migliaia.

Metodo abbreviativo per la divisione.

311. Sia da dividersi 1398643325 per 75489.

ottenere il prodotto nè anche con un errore minore di un diecimillesimo; poichè il prodotto sarebbe stato 160,00134, dalla cui dritta supprimendo la cifra 4, sarebbe divenuto 160,0013, il quale è con un errore in difetto maggiore di 1 diecimillesimo.

Si separano con una linea tante cifre dalla dritta del dividendo quante sono quelle del divisore meno due; perciò

nel nostro esempio dovranno separarsi tre cifre; poi (disponendo l'operazione come si vede qui

$$\begin{array}{r|l} 1398643 & 325 \\ 643753 & \\ \hline 39841 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 75489 & \\ 18 & 5278 \\ \hline \end{array}$$

a fianco, ove abbiamo scritta anche la divisione fatta col metodo ordinario) si farà la divisione del numero rappresentato

2097

588

61

1

dalle cifre a sinistra del dividendo pel divisore, cioè si dividerà

$$\begin{array}{r|l} 1398643 & 325 \\ 75489 & \\ \hline 643753 & \\ 603912 & \\ \hline 398413 & \\ 377445 & \\ \hline 209682 & \\ 150978 & \\ \hline 587045 & \\ 528423 & \\ \hline 58622 & \end{array} \quad \begin{array}{r|l} 75489 & \\ 18 & 527 \\ \hline \end{array}$$

1398643 per 75489, e si avrà per quoziente 18, e per resto 39841. Indi si proseguirà la divisione senza abbassare le cifre

che si sono separate dalla dritta del dividendo; ma, affinchè la medesima possa continuarsi, deve sopprimersi la cifra 9 a dritta

del divisore, il che abbiamo segnato con un punto al di sopra; perciò si dividerà il resto 39841

per 7548, e si avrà per quoziente 5. Poi si moltiplicherà il quoziente 5 pel divisore tenendo conto della ritenuta pro-

veniente dalla cifra 9 che si è soppressa, ed il prodotto 37744 si toglierà dal dividendo parziale 39841: fatta la sottrazione, si avrà per resto 2097. Poi si continua la di-

visione dividendo il resto 2097 pel divisore da cui primieramente si sopprime la cifra 8, cioè si dividerà 2097 per 754, e si otterrà per quoziente 2, il quale nel moltiplicarsi pel divisore si terrà conto della ritenuta proveniente dal-

la cifra 8 che ora si è soppressa, quindi si avrà per prodotto 1509 che si toglierà dal dividendo parziale 2097, e si otterrà per resto 588. Similmente si proseguirà la divisione, finchè si giunga a dividere il resto 61 per la prima cifra 7

del divisore, ed il quoziente 8 che si avrà non farà parte

della cifra del quoziente cercato , ma servirà per correggere l'ultima cifra 7 del medesimo ; perciò il quoziente cercato sarà 18528, con un errore in eccesso minore di mezza unità.

Per dar ragione di questo modo di operare , paragoniamo la divisione che si fa col metodo abbreviativo a quella che si effettua col metodo ordinario, ed osserviamo che nella prima , essendo giunti al resto 39841 da cui si è cominciata la divisione col metodo abbreviativo, ci siamo astenuti di abbassare la cifra 9 del dividendo, la quale avrebbe dovuto abbassarsi per proseguire la divisione parziale, ed abbiamo diviso il resto 39841 pel divisore da cui si è soppressa la cifra 9 a dritta : abbiamo fatto così , perchè tanto la detta cifra 3, quanto l'ultima cifra 9 a dritta del divisore non influiscono sulla seguente cifra 5 del quoziente.

Poi, nel fare la moltiplicazione della cifra 5 del quoziente per la cifra 8 del divisore, abbiamo aggiunto al prodotto 40 le 4 unità di ritenuta proveniente dal moltiplicare la cifra 9 del divisore per 5; indi si è tolto il prodotto parziale dal resto 39841, e si è ottenuto per resto 2097. Ciò si è fatto per non togliere dal dividendo parziale meno di quanto se ne toglie col processo della divisione ordinaria , e per avere esatte le cifre del resto ; non pertanto questo resto ed anche gli altri resti seguenti possono essere in eccesso di un' unità , come difatti avviene nel nostro esempio , ove il resto 2097 contiene un' unità di più del resto che si avrebbe dalla divisione ordinaria : ciò deriva dal perchè in questa divisione non potendosi togliere 5 da 3, è bisognato farsi imprestare un' unità dalla cifra 1 la quale è divenuta zero ; ma nella divisione abbreviata la cifra 1 non dovendo nulla imprestare , nel resto si avrà nn'unità di più.

Nelle seguenti divisioni parziali le ultime cifre de' resti non solo possono avere un'unità di più per la stessa ragione , ma possono averne anche un' altra di più proveniente

dalle ritenute che si trascurano per la soppressione delle cifre a dritta del divisore. Così avviene nel passaggio dal quarto al quinto resto, ove si scorge che il quarto resto della divisione abbreviata è 588, e le tre prime cifre del quarto resto della divisione ordinaria formano il numero 587, che è minore di un' unità di 588; il quinto resto poi della divisione abbreviata è 61, e le due prime cifre del quinto resto della divisione ordinaria formano il numero 58 che è minore di 3 unità di 61; perciò l' aumento è stato di due unità nel passaggio dal quarto al quinto resto.

Segue da questa considerazione che nella divisione abbreviata il secondo dividendo parziale abbreviato può contenere un' unità di più, il terzo due ed anche tre, il quarto può contenere sino a cinque di più, e così di seguito. E poichè i dividendi parziali abbreviati sono tanti quante sono le cifre del divisore, l' ultimo di essi potrà avere tante unità di più quant' è il doppio numero delle cifre del divisore meno tre; perciò nel fare le divisioni parziali, se bisognasse giungere sino all' ultima cifra del dividendo parziale per assicurarsi se la cifra del quoziente sia giusta, allora converrà togliere quelle unità di più che può avere l' ultima cifra a dritta di quel dividendo parziale di cui si tratta, e vedere se dopo la sottrazione la cifra del quoziente rimane la stessa; perchè se non rimane la stessa, può cader dubbio sull' esattezza della cifra del quoziente. Nel nostro esempio l' ultimo dividendo parziale 61 potendo avere sino a 5 unità di più (sebbene realmente non ha che tre di più), togliendone queste 5 unità, resta 56, il quale resto diviso per la prima cifra 5 del divisore non fa alterare la cifra 8 del quoziente; d' altronde, trattandosi della ultima cifra del quoziente, anche se essa si fosse alterata divenendo 7, ciò non avrebbe influito sul quoziente cercato, perchè la cifra 7 servendo solamente a correggere l' ultima cifra del quoziente, il medesi-

mo sarebbe rimasto 18528 con un errore in eccesso minore di mezza unità.

Da quanto si è detto si raccoglie che l'esposto metodo essendo poggiato sulla considerazione che le ultime cifre a dritta del dividendo e del divisore non influiscono sul quoziente, deve essersi sempre cauto allorchè nel fare la divisione evvi bisogno di giungere sino all'ultima cifra a dritta del dividendo parziale per decidere qual sia la cifra del quoziente. Così nell'esempio qui a fianco, bisogna giungere sino all'ultima cifra del dividendo parziale 238952 per assicurarsi se la cifra 6 del quoziente è veramente 6 come sembra in apparenza; ma tenendo presente che la cifra la quale viene dopo nel dividendo è 3, si scorge che la cifra del quoziente è 5 e non già 6. Ed è da notarsi che in questo esempio si verifica il caso in parola nel primo dividendo parziale della divisione abbreviata, rispetto a cui si conosce che la cifra seguente del dividendo è 3; ma se ciò fosse avvenuto in una delle divisioni parziali posteriori, allora non saremmo affatto sicuri dell'esattezza della rispettiva cifra del quoziente; sì perchè non si conosce la cifra che segue a dritta del dividendo parziale, sì perchè l'ultima sua cifra a dritta può avere un certo numero di unità di più.

$$\begin{array}{r|l}
 1831968 & 3265 \\
 238952 & \\
 39825 & \\
 3983 & \\
 400 & \\
 42 & \\
 7 & \\
 \hline
 398254 & \\
 4 & 59991
 \end{array}$$

Nel nostro esempio il penultimo dividendo parziale 42, potendo avere sino a 7 unità di più, bisogna togliere queste 7 unità e vedere se il resto diviso per 3 dà pure per quoziente 9, ma si trova per quoziente 8, perchè 3 è contenuto 8 volte nel resto 35 con l'avanzo di 8, il quale avanzo dovrebbe mettersi innanzi la cifra seguente del dividendo e vedere se il 3 è contenuto 9 volte nel numero che viene a formarsi; ma noi ignorando qual sia la seguente cifra

del dividendo, essa potrebbe essere anche zero, ed allora il 9 non è contenuto 9 volte in 80: perciò non possiamo asserire con certezza che 9 sia la giusta cifra del quoziente. Ed è osservabile che nè anche facendovi la correzione essa diviene 9; difatti moltiplicando 8 per 3, ed aggiungendo al prodotto la ritenuta proveniente dal moltiplicare per 8 la cifra 9 del divisore, si ha per somma 31, che tolta da 35 dà per resto 4, il quale diviso per 3 dà per quoziente 1; perciò essendo 1 la cifra che abbiám di più nel quoziente affin di correggere l'ultima sua cifra 8, questa cifra resta 8, ed il quoziente sembra essere 45998, mentre esso in realtà è 45999. Ciò nondimeno, noi abbiamo fatta l'operazione supponendo che nel dividendo parziale 42 vi sieno solamente 3 unità di più, perchè difficilmente avviene che un dividendo parziale si trovi in eccesso di quel numero di unità di cui più sopra abbiamo detto potersi trovare; e può ritenersi in generale che ciascun dividendo parziale abbia tante unità di più quante sono state le divisioni abbreviate meno una, che si sono fatte sino a quel dividendo parziale di cui si tratta.

La ragione per cui debbonsi separare dalla dritta del dividendo tante cifre quante sono quelle del divisore meno due, si è per avere il quoziente del giusto numero di cifre con una sola di più, la quale serva ad eseguire la correzione dell'ultima cifra a dritta. Difatti, con un poco di attenzione si scorge che, dopo fatta la divisione del numero rappresentato da quelle cifre a sinistra del dividendo che si sono separate con la linea, restano a farsi tante divisioni parziali quante sono le cifre del divisore meno due; ma le divisioni che si fanno sono tante quante le cifre del divisore meno una, dunque in tal modo veniamo a trovare un quoziente con una cifra di più del numero delle cifre che esso deve avere; ma questa cifra di più non si trova che a solo fine di correggere

la penultima, per avere il risultato con un errore minore di mezza unità.

312. Se dopo aver separate tante cifre dalla dritta del dividendo quante sono quelle del divisore meno due, le cifre a sinistra formano un numero minore del divisore, converrà sopprimere tante cifre a dritta del divisore quante ne sono necessarie affinché la divisione possa eseguirsi. Così nell' esempio qui di contro, bisogna sopprimere una cifra a dritta del divisore, e l' operazione comincerà dal dividersi 8342 per 5386; perciò in questo caso le divisioni abbreviate cominciano dalla prima divisione parziale. Eseguendo l' operazione, si trova per quoziente 1548; ma l' ultima cifra 8 che vi è di più servendo a correggere la penultima, il quoziente cercato sarà 155 con un errore minore di mezza unità.

$$\begin{array}{r|l} 8342 & 897 \\ 2956 & \\ 263 & \\ 48 & \\ 6 & \end{array} \quad \begin{array}{r} 53864 \\ \hline 1548 \end{array}$$

313. Volendosi applicare il metodo abbreviativo alla divisione de' numeri decimali: sia per esempio il numero 5034,02 da dividersi per 95,037, richiedendosi che il quoziente differisca dal vero per meno di $\frac{1}{1000}$. Si prepareranno prima il dividendo ed il divisore secondo la regola del n.° (168); perciò l' operazione si riduce a dividere 5034020,000 per 95037, ed effettuando su di questi numeri la divisione abbreviata, considerandoli come interi (come si vede qui a fianco), e distaccando poi tre cifre decimali dal quoziente che ne risulta, si otterrà il quoziente cercato uguale a 52,968. Difatti, se il dividendo avesse rappresentato unità semplici, e non già millesimi, cioè se esso fosse stato 503402000 e non già 5034020,000, il quoziente avrebbe pure rappresentato unità semplici, differendo dal vero per meno di mezza unità; quindi è manifesto che il dividendo rappresentando millesi-

$$\begin{array}{r|l} 5034020 & 000 \\ 282170 & \\ 92096 & \\ 6563 & \\ 862 & \\ 07 & \end{array} \quad \begin{array}{r} \dots \\ 95037 \\ \hline 529690 \end{array}$$

ciò il divisore sarà 167000. Così le cifre 2 e 4 del quoziente 24 che si ottiene saranno le due seguenti cifre della radice cercata; laonde questa radice sarà 83524, con un errore minore di mezza unità.

Difatti, indicando con x il numero da aggiungersi alla parte già trovata della radice, si avrà che il quadrato di $83500 + x$ pareggia il n.^{ro} proposto, cioè sarà $(83500)^2 + 2 \times 83500 \times x + x^2 = 6976258563$; e togliendo $(83500)^2$ ed x^2 dell'una e dell'altra di queste grandezze uguali, ne verrà $2 \times 83500 \times x = 6976258563 - (83500)^2 - x^2$; e dividendo queste due ultime grandezze uguali per 2×83500 , ne risulterà

$$x = \frac{6976258563 - (83500)^2}{2 \times 83500} - \frac{x^2}{2 \times 83500}; \text{ cioè la quan-}$$

tità da aggiungersi alla radice trovata si ottiene dividendo il resto pel doppio della medesima radice, e togliendo dal quoziente la frazione $\frac{x^2}{2 \times 83500}$

Or questa frazione $\frac{x^2}{2 \times 83500}$ è una frazione vera; per-

chè x , o che sia un numero di due cifre esatto, o che sia compreso fra due numeri consecutivi di due cifre, il suo quadrato sarà sempre minore di un numero di cinque cifre, n.^o (313), e conseguentemente minore del denominatore 2×83500 . Inoltre, la detta frazione sarà minore di una mezza unità dell'infim' ordine del quoziente suddetto; perchè il numeratore x^2 è minore di 83500 che è metà del denominatore 2×83500 . Adunque la quantità da aggiungersi alla radice trovata componendosi del surriferito quoziente diminuito di una frazione che è minore di una mezza unità dell'infim' ordine del medesimo quoziente, questa frazione potrà dispregzarsi; e però aggiungendo alla radice trovata il solo quoziente, si otterrà la radice cercata differente dal vero per meno di una mezza unità dell'infim' ordine. È chiaro poi

che la differenza fra 6976258563 ed $(83500)^2$, la quale deve dividersi per 2×83500 per avere il quoziente predetto, si ottiene abbassando a fianco al resto 400 le seguenti coppie del numero proposto: quindi è che per trovare le rimanenti cifre della radice bisogna abbassare a dritta del resto le seguenti coppie del numero proposto, e dividerle il numero che ne risulta pel doppio della radice trovata, avendo riguardo all'ordine di unità che esso rappresenta.

Questo metodo di trovare le rimanenti cifre della radice acquista il maggior grado di semplicità quando le coppie che restano ad abbassarsi sono formate da zeri; poichè è facile vedere che la metà di questi zeri si sopprimono, per esserne altrettanti a dritta del divisore.

315. Convien non pertanto avvertire che adoperando questo metodo, alle volte non può conoscersi se l'ultima cifra della radice sia in eccesso o in difetto. Difatti, nell'esempio addotto, l'ultima cifra 4 non sappiamo se sia mancante o eccedente; poichè, in forza di quel che abbiamo dimostrato, il numero da aggiungersi alla radice trovata essendo

$$x = \frac{4008563}{2 \times 83500} - \frac{x^2}{2 \times 83500} = 24 \frac{563}{167000} - \frac{x^2}{167000},$$

il quoziente 24 sarà in eccesso, o in difetto, secondo che la frazione $\frac{563}{167000}$ è minore o maggiore dell'altra $\frac{x^2}{167000}$; cioè secondo che il resto della divisione è minore o maggiore di x^2 (*). Ma ignorandosi da noi se x sia minore di

(*) Vi sono alcuni casi ne quali può conoscersi se il resto della divisione sia minore o maggiore del detto quadrato; cioè, se l'errore sia in eccesso o in difetto; e sarà in eccesso o in difetto secondo che le cifre del resto sono una di meno del doppio delle cifre della radice trovate con la divisione, o pure sono una di più di questo doppio.

Per le considerazioni fatte in questo numero, ci asteniamo di far

24, ne segue che se fosse molto prossimo a 23, poichè $23^2 = 529$, sarebbe allora x^2 minore di 563, e però il quoziente 24 sarebbe in difetto. Se poi x fosse molto prossimo a 24, poichè $24^2 = 576$, sarebbe allora x^2 maggiore di 563; donde il quoziente 24 sarebbe in eccesso.

A R T. II.

316. In questo articolo trattiamo del modo come conoscere il grado di approssimazione di un risultamento, proveniente da operazioni fatte su numeri, i quali sono essi medesimi approssimati.

Approssimazione relativa all'addizione.

317. Dovendosi addizionare più numeri ne' quali l'unità dell' infimo ordine sia la stessa, e ciascuno di essi sia erroneo di una quantità minore della metà di questa unità; se i numeri dati sono m , la loro somma sarà in eccesso o in difetto di quant'è la metà di m unità dell' infim' ordine se m è pari, ovvero di quant'è la metà di $m+1$ unità dell' infim' ordine, se m è dispari. Così, per esempio, se dovessero addizionarsi i quattro numeri 25,394, 72,320, 81,476, 0,827;

parola del modo come poter continuare a trovare col mezzo della divisione altrettante cifre meno una delle radici, rispetto a tutte quelle già trovate, e segnatamente con la divisione abbreviata di cui parlammo nel n.° (311); poichè, con questa divisione non avendosi il vero resto della stessa, non si può agevolmente discernere se si verificano i casi poco fa accennati; e però non si può veder con chiarezza se l'ultima cifra della radice sia in eccesso, onde così diminuirla di un' unità ed averla in difetto, come si richiede allorchè l'operazione vuol proseguirsi per trovare con lo stesso metodo le altre seguenti cifre della radice.

la loro somma 180,017 potrà essere in eccesso o in difetto di una quantità che è minore della metà di 4 millesimi e perciò minore di 2 millesimi; laonde, togliendone questi 2 millesimi, si avrà il numero 180,015 che è in difetto, e differisce dal vero per meno di 4 millesimi; dunque la somma è esatta sino alla cifra de' centesimi inclusivamente. Se poi i numeri dati fossero di numero dispari, così, per esempio se fossero i quattro precedenti più il numero 9,504; la loro somma 189,518 sarà in eccesso o in difetto per meno di 3 millesimi.

Quando poi l'unità dell'infim' ordine non è la stessa in tutt' i numeri dati, allora converrà ritenere le cifre a sinistra del risultato sino a quella corrispondente all'unità dell'infimo ordine di quello fra i numeri dati, che ha l'infimo ordine delle sue unità maggiore dell'infimo ordine di unità degli altri; e così il risultato che si ottiene differisce dal vero per meno della metà di quest' unità; ma ciò vale nel caso in cui un solo de' numeri dati avesse l'unità dell'infimo ordine maggiore dell'unità dell'infimo ordine degli altri; che se poi fossero più d'uno, anche è facile vedere quale sarà il grado di approssimazione.

Approssimazione relativa alla sottrazione.

318. Dovendo eseguirsi la sottrazione fra due numeri che sono erronei per meno di mezza unità del loro infimo ordine; se quest' ordine è lo stesso ne' due numeri dati, come avviene, per esempio, allorchè deve togliersi da 75,68 il numero 59,43, eseguendola sottrazione, il resto che si ottiene sarà 16,25; ma il maggiore di due numeri dati potendo essere in difetto ed il minore in eccesso, il resto vero potrebbe essere prossimamente uguale a $75,68\frac{1}{2} - 59,42\frac{1}{2} = 16,26$, mantenendosi sempre al disotto di questo limite; così pure il maggiore potendo essere in eccesso ed il minore in difetto, il

resto vero potrebbe essere prossimamente uguale a $75,67\frac{1}{2}$ — $59,43\frac{1}{2} = 16,24$, mantenendosi sempre al di sopra di questo limite. Adunque il resto 16,25 che si ottiene togliendo dal maggiore il minore de' numeri dati, essendo compreso fra i due numeri 16,26 e 16,24 che sono i limiti fra i quali è compreso il resto vero, differirà dal vero per meno di mezza unità dell' infimo ordine.

Se poi la sottrazione debba eseguirsi fra numeri che essendo approssimati per una quantità minore di mezza unità dell' infim' ordine, quest' unità non è la stessa ne' due numeri dati; allora bisogna ritenere le cifre a sinistra del resto sino a quella corrispondente all' infimo ordine di quello de' numeri dati, in cui l' infimo ordine di unità è maggiore, differendosi dal vero per meno della metà di questa unità.

Composizione del prodotto proveniente dal moltiplicar la somma o differenza di due numeri per la somma o differenza di due altri numeri.

319. Prima di passare alla moltiplicazione dalla natura che trattiamo in questo articolo, conviene stabilire qual sia il prodotto della somma o differenza di due numeri a e b per la somma o differenza di due altri numeri c e d , senza che si esegua prima la sottrazione e poi si faccia il prodotto; cioè convien fare il prodotto di $a+b$ per $c+d$; e qui fa uopo avvertire che quando si tratta di differenza supporremo a maggiore di b , e c maggiore di d ; ed inoltre avvertiamo che in questa moltiplicazione, per semplicità, scriveremo i fattori l' uno di seguito all' altro senza interposizione di segno. Così, per esempio, indicheremo con ab il prodotto di a per b .

In primo luogo sia $a+b$ da moltiplicarsi per $c+d$. È chiaro che il prodotto si ottiene moltiplicando prima $a+b$

per c , e poi $a+b$ per d , e sommando i risultati; quindi il prodotto cercato sarà $ac+bc+ad+bd$.

Moltiplichiamo ora $a-b$ per $c+d$; e qui pure si vede che il prodotto si ottiene moltiplicando prima $a-b$ per c , e poi $a-b$ per d . Ma per moltiplicare $a-b$ per c , dovendo prima a diminuirsi di b , e poi il resto moltiplicarsi per c ; se tutta la quantità a si moltiplica per c , il prodotto ac sarà maggiore del vero; perchè contiene di più la quantità b moltiplicata per c , che dà bc ; adunque per avere il prodotto vero, dal prodotto ac bisogna togliere bc ; perciò il prodotto di $a-b$ per c sarà $ac-bc$. Per la stessa ragione, il prodotto di $a-b$ per d sarà $ad-bd$. Adunque il prodotto di $a-b$ per $c+d$ sarà $ac-bc+ad-bd$.

Passiamo ora a moltiplicare $a-b$ per $c-d$. E qui scorriamo che moltiplicando $a-b$ per c , il prodotto $ac-bc$ sarà maggiore del vero, perchè c doveva prima diminuirsi di d , e poi doveva moltiplicarsi $a-b$ pel resto; quindi il prodotto $ac-bc$ supera il prodotto vero di $a-b$ moltiplicato per d , cioè di $ad-bd$; perciò se togliamo da $ac-bc$ la quantità $ad-bc$ che vi è di più, avremo il prodotto vero. Ma qui si presenta un'altra difficoltà, cioè del come togliere da $ac-bc$ la quantità $ad-bd$. Questa difficoltà si eliminerà riflettendo che, se da $ac-bc$ togliamo la sola quantità ad , il resto $ac-bc-ad$ sarà minore del vero; perchè abbiamo tolta tutta la quantità ad senza prima diminuirla di bd ; ed è chiaro che questo resto sarà minore del vero di bd , cioè della quantità che abbiamo tolta di soverchio; adunque se al resto $ac-bc-ad$ aggiungiamo bd , avremo il vero resto, il quale sarà $ac-bc-ad+bd$.

Infine dovendosi moltiplicare $a+b$ per $c-d$, dopo ciò che abbiám detto, è facile vedere che il prodotto sarà $ac+bc-ad-bd$. Adunque rappresentando con una sola espressione il prodotto di $a+b$ per $c+d$, esso sarà $ac+bc+ad+bd$.

combinando i segni convenientemente a ciascuno de' quattro casi de' quali abbiamo fin ora parlato,

Approssimazione relativa alla moltiplicazione,

320. Sia, per esempio, da moltiplicarsi il numero 8,359 pel numero 27,1236, il primo de' quali sia esatto, ed il secondo erroneo per meno di mezza unità dell' infimo ordine, ma che consideriamo come se fosse mezza unità. Il prodotto, come è chiaro, sarà

$$8,359 \left(27,1236 \pm \frac{0,0001}{2} \right) = 8,359 \times 27,1236 \pm 8,359 \times \frac{0,0001}{2}.$$

Ora il numero $8,359 \times \frac{0,0001}{2}$ che deve aggiungersi o togliersi al prodotto che si ottiene, esprimendo unità dallo stesso ordine che quelle espresse dal detto prodotto, ed avendo tante cifre, a contar dalla prima cifra significativa a sinistra, quante sono quelle del fattore esatto, tutto al più può far variare tante cifre a dritta del prodotto quante sono quelle del fattore esatto più una. Quindi segue che, nel caso d' un sol fattore inesatto, nel prodotto, a contar da dritta, debbonsi riguardar come erronee tante cifre quante sono quelle del fattore esatto più una. Perciò nel nostro esempio dovranno ritenersi come erronee cinque cifre a dritta del prodotto, laonde esso sarà esatto sino alla cifra de' centesimi.

Può osservarsi che nel caso in cui la prima cifra significativa a sinistra del fattore esatto è l' unità, la presenza del divisore 2 fa sì che le cifre del numero da aggiungersi o togliersi al prodotto che si ottiene sono una di meno di quelle del fattore esatto; perciò tutt' al più devono riguardarsi come erronee tante cifre a dritta del prodotto quante sono quelle del fattore esatto.

Facciamo inoltre notare che se il fattore inesatto fosse erroneo per meno di un' unità dell' infimo ordine, la prece-

dente osservazione non avrebbe luogo; ciò non pertanto vale anche la regola data di essere erronee tante cifre a dritta del prodotto quante sono quelle del fattore esatto più una.

321. Sieno poi erronei ambedue i fattori per una quantità minore di mezza unità dell' infim' ordine, e questi fattori sieno, per esempio, i numeri 74,183 e 5,96124. Considerando gli errori come se fossero di mezza unità dell' infim' ordine, il prodotto sarà

$$\left(74,183 \pm \frac{0,001}{2}\right) \left(5,96124 \pm \frac{0,00001}{2}\right) = 74,183 \times 5,96124 \pm \frac{0,001}{2} \times 5,96124 \pm 74,183 \times \frac{0,00001}{2} \pm \frac{0,001 \times 0,00001}{4}$$

Ora è facile scorgere che delle quattro parti di cui si compone il prodotto totale, le tre prime rappresentano unità del medesimo ordine che sono centomilionesimi, e la somma della seconda e terza forma un numero di centomilionesimi di tante cifre quante ne ha il fattore che tiene più cifre, a contar dalla prima cifra significativa a sinistra; perciò questa somma aggiunta o tolta alla parte principale del prodotto, che è $74,183 \times 5,96124$, potrà alterare alla dritta del medesimo tante cifre quante sono quelle del fattore che ne ha di più, più una; nel nostro caso dunque può alterarne sette. Non abbiamo poi tenuto conto della quarta parte del prodotto, perchè essa evidentemente non influisce su quelle cifre del risultato che bisogna ritenere.

Quindi segue la regola che, *quando i due fattori sono incerti, debbonsi riguardar come erronee tante cifre a dritta del prodotto, quante ne ha il fattore di più cifre, più una, a contar dalla prima cifra significativa a sinistra.*

Or poichè il prodotto di 74,183 per 5,96124 deve avere otto cifre decimali, e possono essere erronee sette di queste cifre, siamo sicuri che il prodotto sarà esatto sino alla cifra de' decimi inclusivamente. Giovandoci di questa conoscenza, applicheremo alla moltiplicazione di questi fattori il me-

todo abbreviativo del n.° (307) scrivendo, come si vede qui a fianco, la cifra delle unità del fattore 74,183 sotto quella de' millesimi dell'altro fattore 5,96124, e così si otterrà per prodotto il numero 442,2.

5,96124
88147
417286
23844

Qui pure è da osservarsi che, per la presenza del divisore 2, nel caso in cui la prima cifra significativa a sinistra del fattore che ha più cifre fosse l'unità, le cifre erronee a dritta del prodotto che si ottiene saranno tutt' al più quante sono quelle del fattore anzidetto.

596
476
17
442219

Approssimazione relativa alla divisione.

322. IN PRIMO LUOGO: Supponiamo che il dividendo sia erroneo per meno di mezza unità dell' infimo ordine, ed il divisore sia esatto. Indicando con a il numero delle cifre del dato dividendo, a contar dalla prima cifra significativa a sinistra, con b l' analogo numero di cifre del dato divisore, e con x il numero de' zeri da aggiungersi al dividendo affinché il quoziente venga espresso con tante cifre sicchè l'ultima a dritta sia erronea per meno di un'unità dell' infim' ordine; ed indicando con y il numero di queste cifre del quoziente a contar dalla prima cifra significativa a sinistra, il prodotto del quoziente pel divisore, n.° (313), avrà $y+b-1$ cifre ovvero $y+b$ cifre, secondo che il divisore dato è o non è contenuto nelle b cifre a sinistra del dividendo. Or questo numero di cifre pareggia il numero delle cifre del dividendo che è $a+x$; in effetti le cifre del dividendo si ottengono moltiplicando il quoziente pel divisore ed aggiungendo il resto al prodotto; ma il resto essendo minore del divisore non altera il numero delle cifre del detto prodotto: dunque si avrà $a+x=y+b-1$, ovvero $a+x=y+b$, secondo che il

divisore è o non è contenuto nelle b cifre a sinistra del dividendo. Ciò posto, le cifre erronee del dividendo dopo aggiunti i zeri sono $x+1$: poichè l'ultima cifra del dividendo proposto essendo erronea per meno di mezza unità, saranno anche erronee le x cifre a dritta di essa, ossia i zeri aggiunti. D'altronde, considerando il dividendo come il prodotto che nasce dal moltiplicare il divisore esatto di b cifre pel quoziente di y cifre il quale è erroneo, il dividendo avrà tutt' al più tante cifre erronee quante sono quelle del fattore esatto più una, cioè ne avrà $b+1$, perciò si avrà $x+1=b+1$, ossia $x=b$; e sostituendo questo valore di x nelle due eguaglianze $a+x=y+b-1$, ed $a+x=y+b$, si otterrà $a+b=y+b-1$, ed $a+b=y+b$; dalle quali si ricava $y=a+1$, ed $y=a$; cioè, *il numero delle cifre del quoziente sulle quali si può contare a partir dalla prima cifra significativa a sinistra, tutt' al più è uguale ad a , ovvero ad $a+1$, secondo che il divisore è o non è contenuto nelle prime cifre a dritta del dividendo.*

IN SECONDO LUOGO: Supponiamo che il dividendo sia esatto, ed il divisore sia erroneo per meno di mezza unità dell' infimo ordine. Primieramente facciamo osservare che la divisione può sempre ridursi ad avere il divisore numero intero. Così, per esempio, se dovesse dividersi 2,569 per 3,74 ove il divisore è erroneo per meno di mezza unità dell' infimo ordine, il quoziente non si altera moltiplicando per 100 tanto il dividendo quanto il divisore; e perciò, dopo tal moltiplicazione, il dividendo divenendo 256,9, ed il divisore vero trovandosi compreso fra $8374-\frac{1}{2}$, ed $8374+\frac{1}{2}$, il quoziente sarà compreso fra 256,9 diviso per $8374-\frac{1}{2}$, e 256,9 diviso per $8374+\frac{1}{2}$. Adunque, in generale, se indichiamo con a il dividendo e con b il divisore dopo che in essi si è trasferita la virgola a dritta di tanti posti quante sono le cifre decimali

del divisore , si avrà che il quoziente $\frac{a}{b}$ sarà compreso fra i due quozienti $\frac{a}{b-\frac{1}{2}}$ ed $\frac{a}{b+\frac{1}{2}}$, il primo de'quali è maggiore del vero , ed il secondo n'è minore. Perciò , se la differenza fra questi due quozienti è una quantità minore di un' unità , di $\frac{1}{10}$, di $\frac{1}{100}$, ec. ; il quoziente che si ottiene dividendo a per b essendo un numero medio fra i due predetti , differirà dal vero per una quantità che sarà rispettivamente minore della metà di 1 , di $\frac{1}{10}$, di $\frac{1}{100}$, ec. Effettuando la sottrazione per aver la differenza fra i due quozienti accennati, questa differenza viene uguale ad

$$\frac{a}{b-\frac{1}{2}} - \frac{a}{b+\frac{1}{2}} = \frac{ab + a/2 - ab + a/2}{b^2 - \frac{1}{4}} = \frac{a}{b^2 - \frac{1}{4}} ;$$

e dividendo il numeratore ed il denominatore per b , ed indicando con q il quoziente di a diviso per b , la prefata differenza diviene uguale a $\frac{q}{b-\frac{1}{4}b}$.

Or questa differenza, affinchè sia una frazione vera, bisogna che la parte intera del quoziente q sia minore del divisore b (cioè del divisore dato considerato come intero) ; e ciò avverandosi , se indichiamo con m il numero delle cifre di b , si possono tener come esatte le prime m o $m-1$ cifre a sinistra del quoziente a contar dalla prima cifra significativa , seconda che le prime m cifre considerate come rappresentanti un numero intero formino o no un numero minore del divisore, anche considerato come intero.

* Così, per esempio, dovendosi dividere 2,569 per 83,74 , converrà arrestarsi alle prime quattro cifre del quoziente , a contar dall'a prima cifra significativa , e si avrà il numero 0,03067 il quale potrà ritenersi come il quoziente cercato differente dal vero per meno della metà di 1 centomillesimo.

In effetti, la frazione $\frac{q}{b-\frac{1}{4}b}$ essendo uguale a $\frac{0,03067}{8374-\frac{1}{4} \times 8374}$,

se il numeratore si rende 100000 volte maggiore con trasferire la virgola alla dritta della cifra 7, essa frazione resta minore dell'unità; quindi prima di trasferirsi la virgola doveva essere minore di 1 centomillesimo dell'unità; perciò il quoziente 0,03067 sarà erroneo per meno della metà di un centomillesimo.

IN TERZO LUOGO: Supponiamo che tanto il dividendo quanto il divisore sieno erronei per meno di mezza unità del loro infim' ordine. In tal caso, dovranno tenersi come esatte tante cifre a sinistra del quoziente quante cifre esatte si hanno da quello de' due numeri dati che ne dà meno. Così, per esempio, se debba dividersi 5,081 per 91,4172; perchè il divisore è erroneo, possono tenersi come esatte le prime sei cifre a sinistra del quoziente, a contar dalla prima cifra significativa; ma perchè il dividendo è erroneo, si possono tener come esatte le sole prime cinque cifre; quindi è che per questa seconda considerazione non possono tenersi come esatte che le sole prime cinque cifre a sinistra del medesimo.

Approssimazione riguardante la radice quadrata.

323. Sia ora da estrarsi la radice quadrata da un numero che sia erroneo per meno di mezza unità dell' infimo ordine, o anche per meno di un'unità di quest'ordine; e si voglia che le radice differisca dal vero anche per meno di un' unità del suo infim'ordine. Indichiamo con a il numero da cui deve estrarsi la radice, con n il numero delle sue cifre, e con x il numero de' zeri da aggiungersi a dritta di a , affinchè le cifre della radice che si estrae dal numero che ne risulta siano esatte, salvo la sola ultima cifra a dritta, la quale potrebbe essere erronea per meno di un' unità dell'ordine che rappresenta: si denoti poi con y il numero di queste cifre della radice.

Supponiamo primieramente che d sia intero, e che il numero delle sue cifre sia dispari. Or poichè sappiamo che per estrarre la radice approssimata da un numero intero bisogna aggiungere alla sua dritta un certo numero di coppie di zeri; ne segue che il numero delle cifre $n+x$ sarà pure dispari. Inoltre è manifesto che estraendo la radice da un numero di cifre dispari, le prime y cifre della radice formano un numero minore di quello rappresentato dalle prime y cifre a sinistra del quadrato: e poichè, trattandosi di un prodotto di due fattori, allorchè un fattore di y cifre è contenuto nelle prime y cifre a sinistra del prodotto, il numero delle cifre del prodotto è uguale al numero delle cifre de' fattori meno una; quindi si avrà, n.º (313), che il quadrato del numero rappresentato dalle y cifre della radice avrà $2y-1$ cifre; e poichè le $n+x$ cifre del numero da cui si estraee la radice sono dispari, ne segue che $n+x=2y-1$.

Ciò posto, la radice di y cifre essendo erronea per meno di un' unità del suo infim'ordine, il suo quadrato avrà $y+1$ cifre erronee, n.º (321): d'altronde è manifesto che a dritta del numero dato debbono aggiungersi tanti zeri che estraendo la radice dal numero che ne risulta, il quadrato di questa radice abbia tante cifre erronee alla sua dritta quante ne sono erronee a dritta del numero da cui essa si estrae; ma a dritta di questo numero sono erronee $x+1$ cifre, dunque si avrà $x+1=y+1$, donde si ricava $y=x$; e sostituendo questo valore di y nell'eguaglianza $n+x=2y-1$, si otterrà $n+x=2x-1$, ossia $n=x-1$; ed aggiungendo 1 all' una ed all' altra di queste grandezze uguali, ne risulterà infine $x=n+1$.

Se poi le cifre del numero dato sono di numero dispari, allora le prime y cifre a dritta della radice formano un numero sempre maggiore, o tutt' al più uguale a quello rappresentato dalle prime y cifre a sinistra del quadrato, di che è facile convincersi: in tal caso dunque il quadrato del-

la radice di y cifre avrà $2y$ cifre, e perciò si avrà l'eguaglianza $n+x=2y$. D'altronde, per la ragione detta poco anzi, si ha $x+1=y+1$, ossia $x=y$; adunque sostituendo questo valore di y nell'eguaglianza $n+x=2y$, ne risulterà $n+x=2x$, donde si desume $x=n$.

Da ciò che abbiain detto si raccoglie che, i zeri da aggiungersi a dritta del numero proposto, quando questo è intero, saranno tanti quanti sono le cifre di esso numero, ovvero quante sono queste cifre più uno, secondo che le cifre del numero dato sono di numero pari o impari.

Sia ora da estrarsi la radice da un numero decimale, per esempio, dal numero 83,527, il quale differisce dal vero per meno di 1 millesimo, ed ove la parte intera contiene un numero dispari di cifre, e la parte decimale ne contiene un numero pari. In tal caso bisognerà aggiungere un numero pari di zeri a dritta del numero dato, n.º (291); e perciò il numero da cui dovrà estrarsi la radice, essendo di cifre dispari, applicandovi lo stesso ragionamento tenuto per un numero intero, si ricadrà nella regola relativa ad un numero intero di cifre dispari; ond'è che i zeri da aggiungersi saranno $n+1$, che nel nostro esempio corrispondono a sei; adunque si potrà contare sulle sei prime cifre a sinistra della radice, delle quali l'ultima cifra a dritta che esprime millesimi, sebbene non sia esatta, differirà dal vero per meno di 1 millesimo.

Se poi restando dispari il numero delle cifre della parte intera, quelle della parte decimale fossero anche dispari; allora bisogna aggiungere alla dritta del numero dato un numero dispari di zeri; e perciò dovrà estrarsi la radice da un numero di cifre dispari; quindi si ricade nella stessa regola detta poco anzi, e si avrà $x=n+1$.

Da qui si desume che allorquando la parte intera del numero decimale contiene un numero di cifre dispari, si dovrà

sempre aggiungere un numero $n+1$ di zeri alla dritta del numero dato, qualunque sia il numero delle cifre della parte decimale.

Se poi la parte intera del dato numero decimale contenesse un numero pari di cifre, ragionando similmente, si troverà che i zeri da aggiungersi a dritta del numero dato saranno n , tanto se le cifre decimali sono di numero pari, quanto se sono di numero dispari.

C A P. IV.

DELLE FRAZIONI CONTINUE.

A R T. I.

324. Si chiama *frazione continua* quella frazione il cui denominatore è un intero più una frazione vera, ed il denominatore di questa seconda frazione è pure un intero unito ad una frazione vera; e così tutti i denominatori seguenti vanno soggetti alla stessa legge. Tal'è, per esempio, la frazione

$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + ec.}}} \quad \text{ed anche l'altra} \quad \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + ec.}}}$$

325. Le frazioni continue che giova considerare sono quelle composte da frazioni che hanno per numeratore l'unità, come sono le due precedenti.

Le frazioni $\frac{a}{1}, \frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}$ ec., delle quali la sola prima è intero, diconsi *frazioni integranti*. I denominatori b, c, d , ec. delle frazioni $\frac{1}{b}, \frac{1}{c}, \frac{1}{d}$, ec. si chiamano *quozienti incompleti*; e dicesi poi *quoziente completo* uno qualun-

que de' detti quozienti con tutto il rimanente della frazione continua che gli sta a dritta. Così, per esempio, il quoziente completo corrispondente alla frazione integrante $\frac{1}{c}$, sarà $c + \frac{1}{d+ec}$.

325. Se in una frazione continua $a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d+ec}}}$

ci arrestiamo alla prima frazione integrante, ovvero alle prime due, ovvero alle prime tre, e così di seguito; e poi formiamo le rispettive frazioni ordinarie equivalenti, si avranno le frazioni $\frac{a}{1}$, $\frac{ab+1}{b}$, $\frac{(ab+1)c+a}{bc+1}$, ec: queste

frazioni si chiamano le *ridotte* della data frazione continua, ed in particolare diconsi *prima ridotta*, *seconda ridotta*, *terza ridotta*, ec.

326. Vi sono diverse grandezze di differente natura, le quali possono essere espresse da una frazione continua; noi, per darne un esempio, facciam vedere come il rapporto di due quantità A e B si convertè in frazione continua. Supponiamo che A sia la grandezza maggiore e B la minore: operando su di esse come se si volesse trovare il loro massimo comun divisore, s'immagini che la quarta divisione riesca esatta; quindi si avranno quattro quozienti e tre resti. Indicando con a, b, c, d , questi quozienti, e con $R, R', R'',$ i tre resti, si avranno le seguenti eguaglianze

$$A=Ba+R, B=Rb+R', R=R'c+R'', R'=R''d;$$

e dividendo queste quattro eguaglianze rispettivamente per B, R, R', R'' , ne verranno le altre quattro seguenti.

$$\frac{A}{B}=a+\frac{R}{B}; \frac{B}{R}=b+\frac{R'}{R}; \frac{R}{R'}=c+\frac{R''}{R'}; \frac{R'}{R''}=d;$$

Ma poichè $\frac{R}{B} = \frac{1}{b + \frac{1}{\frac{R'}{R}}}$, ed $\frac{R'}{R} = \frac{1}{c + \frac{1}{\frac{R''}{R'}}}$, ed $\frac{R''}{R'} = \frac{1}{d}$,

$$\text{sarà } \frac{A}{B} = a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d}}};$$

cioè il rapporto di A e B verrà espresso da una frazione continua. Adunque per convertire il rapporto di due quantità A e B in frazione continua bisogna operare sulle grandezze date come se si volesse trovare il loro massimo comun divisore; ed indicando con a, b, c, d , ec., i quozienti che si ottengono, il rapporto della maggiore A alla minore B , e quello delle minore B alla maggiore A saranno espressi rispettivamente dalle frazioni continue

$$a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \frac{1}{d + \text{ec.}}}}, \text{ ed } \frac{1}{a + \frac{1}{b + \frac{1}{c + \text{ec.}}}}.$$

Si scorge inoltre da ciò che precede, che, quando le due grandezze date non hanno una misura comune, la frazione continua la quale esprime il loro rapporto non ha mai termine, cioè si compone di un numero infinito di frazioni integranti.

A R T. II.

Proprietà delle frazioni continue.

327. Il numeratore della ridotta del ordine n di una frazione continua si forma moltiplicando il quoziente incompleto che le corrisponde pel numeratore della ridotta dell'ordine $n-1$, ed aggiungendo al prodotto il numeratore della ridotta dell'ordine $n-2$; il denominatore poi si forma con la stessa legge per mezzo de' denominatori delle due ridotte precedenti.

Formiamo la prima, la seconda, la terza, e la quarta ridotta; e cerchiamo di mettere in evidenza nel numerato-

re e denominatore di ciascuna il numeratore ed il denominatore delle ridotte precedenti ; si avranno così le quattro prime ridotte che veggonsi scritte qui appresso.

$$\frac{a}{1}, \frac{ab+1}{b}, \frac{(ab+1)c+a}{bc+1}, \frac{[(ab+1)c+a]d+ab+1}{(bc+1)d+b}.$$

Ora in queste ridotte osserviamo una legge di formazione di ognuna di esse per mezzo delle due precedenti ; poichè il numeratore della terza si forma moltiplicando il numeratore della seconda pel quoziente incompleto corrispondente ad essa terza , ed al prodotto evvi aggiunto il numeratore della prima ; il denominatore poi si forma similmente rispetto a' denominatori delle due ridotte precedenti ; e la stessa legge scorgiamo esser vera anche rispetto alla quarta ridotta. Un risultamento analogo si avrebbe da una frazione continua che non comincia per numero intero. Da questo fatto passiamo a dimostrare che la detta legge è vera sempre , facendo vedere che, se essa è vera sino alla ridotta dell'ordine r , sarà pure vera per la ridotta dell'ordine $r+1$.

Difatti, indicando con $\frac{L}{L'}$, $\frac{M}{M'}$, $\frac{N}{N'}$ tre ridotte consecutive rispetto alle quali si avvera l'enunciata legge, e con n il quoziente incompleto corrispondente alla ridotta $\frac{N}{N'}$, e con p l'analogo quoziente corrispondente alla ridotta seguente ; si avrà $\frac{N}{N'} = \frac{Mn+L}{M'n+L'}$. Ora per formare la ridotta seguente alla $\frac{N}{N'}$, bisogna sostituire in questa $n + \frac{1}{p}$ in luogo di n ; fatta cotai sostituzione , la ridotta seguente che ne risulta

$$\text{sarà } \frac{M\left(n+\frac{1}{p}\right)+L}{M'\left(n+\frac{1}{p}\right)+L'} = \frac{(Mn+L)p+M}{(M'n+L')p+M'};$$

ma per ipotesi essendo $\frac{Mn+L}{M'n+L'} = \frac{N}{N'}$, la ridotta seguente alla $\frac{N}{N'}$ si ridurrà ad $\frac{Np+M}{N'p+M'}$; quindi essa si forma per mezzo delle due precedenti con la legge enunciata.

328. *Le differenze fra due ridotte consecutive di una frazione continua vanno sempre più impicciolendo quanto più alto è l'ordine delle ridotte, in modo da divenir minori di qualunque grandezza data.*

Troviamo le differenze fra le prime quattro ridotte, togliendo sempre dalla precedente la seguente; ma convien notare che nel togliere la terza ridotta dalla seconda avviene di dover togliere da una quantità un'altra maggiore, quindi la sottrazione non potrà eseguirsi; non pertanto la differenza si otterrà togliendo dalla maggiore la minore, ma per indicare che la ridotta seguente era maggiore della precedente metteremo il segno — innanzi al resto; perciò la differenza fra la seconda e la terza ridotta si troverà essere $\frac{-1}{(bc+1)b}$. Similmente si praticerebbe in seguito, se si dovesse togliere da una ridotta un'altra maggiore della prima.

Eseguito dunque le sottrazioni indicate, le differenze saranno rispettivamente

$$\frac{a}{1} - \frac{ab+1}{b} = \frac{1}{b}, \quad \frac{ab+1}{b} - \frac{(ab+1)c+a}{bc+1} = \frac{-1}{(bc+1)b},$$

$$\frac{(ab+1)c+a}{bc+1} - \frac{[(ab+1)c+a]d+ab+1}{(bc+1)d+b} = \frac{1}{[(bc+1)d+b](bc+1)}.$$

Ora osserviamo che queste differenze hanno per numeratore l'unità preceduta alternativamente dal segno + e —. Questa legge, che si avvera sino alla quarta ridotta, farem vedere che è sempre vera, dimostrando che essa verificandosi sino alla ridotta dell'ordine r , sarà pure vera per la ridotta dell'ordine $r+1$.

Difatti, siano $\frac{L}{L'}$ ed $\frac{M}{M'}$ le due ridotte consecutive sin dove si avvera la detta legge; la differenza fra queste ridotte essendo $\frac{L}{L'} - \frac{M}{M'} = \frac{LM' - ML'}{L'M'}$, sarà quindi $LM' - ML' = \pm 1$.

Ciò posto, la differenza fra la ridotta $\frac{M}{M'}$ e la seguente $\frac{N}{N'}$ è $\frac{MN' - NM'}{M'N'}$; ma poichè sappiamo, n.° (327), che $N = Mn + L$, ed $N' = M'n + L'$, se mettiamo questi valori di N ed N' nel numeratore della prefata differenza, esso diverrà $M(M'n + L') - (Mn + L)M' = MM'n + ML' - MM'n - LM' = ML' - LM'$; ma si è supposto che $LM' - ML' = \pm 1$; adunque sarà $ML' - LM' = \mp 1$; e però il numeratore della cennata differenza riducendosi a ∓ 1 , l'enunciata legge è vera sino alla ridotta dell'ordine $r+1$.

Ora dal modo come N si compone per mezzo di M' , ed M' per mezzo di L' , si vede che L' è minore di M' , ed M' è minore di N' ; quindi segue che le differenze $\frac{1}{L'M'}$, $\frac{1}{M'N'}$, ec.

vanno sempre più impicciolendo a misura che l'ordine delle ridotte diviene più elevato.

COROLLARIO. Ciascuna delle ridotte è una frazione irriducibile. Poichè se, per esempio, i termini della ridotta $\frac{M}{M'}$

avessero un divisor comune diverso dall'unità, questo divisor comune dovrebbe anche dividere la differenza $MN' - NM'$, perchè divide i due numeri MN' ed NM' ; ma ciò è impossibile, poichè abbiám dimostrato essere $MN' - NM' = \pm 1$.

329. Il valore di una grandezza X la quale viene espressa da una frazione continua è sempre compreso fra due ridotte consecutive: e la ridotta dell'ordine n si approssima più al valore di X della ridotta dell'ordine $n-1$.

Considerando due qualunque delle ridotte consecutive, per esempio, le due $\frac{M}{Mp}$ ed $\frac{N}{Np}$, farem vedere che il valore di X è compreso fra esse. A tal effetto osserviamo che se nella ridotta seguente ad $\frac{N}{Np}$, la quale è $\frac{Ny+M}{Np+Mp}$, mettiamo invece del quoziente incompleto p il quoziente completo che indichiamo con y , essa diviene uguale alla grandezza X , cioè si avrà $\frac{Ny+M}{Ny+Mp} = X$; adunque la differenza fra X e la ridotta $\frac{M}{Mp}$ sarà $\frac{Ny+M}{Ny+Mp} - \frac{M}{Mp} = \frac{NMy+MM-MNy-MMp}{Mp(Ny+Mp)} = \frac{(NM-MN')y}{Mp(Ny+Mp)} = \frac{\pm y}{Mp(Ny+Mp)}$; e la differenza fra X e la ridotta $\frac{N}{Np}$ sarà

$$\frac{Ny+M}{Ny+Mp} - \frac{N}{Np} = \frac{NNy+MN-MNy-NMp}{Np(Ny+Mp)} = \frac{MN'-NMP}{Np(Ny+Mp)} = \frac{\mp 1}{Np(Ny+Mp)}$$

Or poichè M è minore di N , sarà il denominatore della prima differenza minore del denominatore della seconda; ma il numeratore y della prima è maggiore del numeratore 1 della seconda; quindi la prima differenza sarà minore della seconda. Da qui si rileva che la ridotta $\frac{N}{Np}$ si avvicina

più al valore di X della ridotta $\frac{M}{Mp}$.

Inoltre, poichè le differenze fra X e le due ridotte consecutive sono di segno contrario, per essere il numeratore della prima uguale a $\pm y$, e quello della seconda uguale a ∓ 1 ; ne segue che il valore di X è compreso fra i valori delle due ridotte.

COROLLARIO I. Or poichè $y = p + \frac{1}{q+ec}$; se poniamo p in

luogo di y nel denominatore della differenza $\frac{1}{N^i(N^i y + M^i)}$ fra la grandezza X e la ridotta $\frac{N}{N^i}$, si avrà che tal differenza sarà minore di $\frac{1}{N^i(N^i p + M^i)}$; ma $N^i p + M^i = P^i$, adunque la medesima differenza sarà minore di $\frac{1}{N^i P^i}$, e quindi con più ragione minore di $\frac{1}{N^i \times N^i}$, per essere N^i minore di P^i .

Perciò: la differenza fra la quantità X e la ridotta dell'ordine n è minore della frazione che ha per numeratore l'unità, e per denominatore il quadrato del denominatore di essa ridotta.

COROLLARIO II. Allorquando una frazione continua comincia da un numero intero, com'è per esempio, la frazione $a + \frac{1}{b + \frac{1}{c+ec}}$; poichè la prima ridotta $\frac{a}{1}$ è maggiore della

quantità X , la seconda $\frac{ab+1}{b}$ sarà minore; e così seguitando, si scorge che le ridotte di posto dispari saranno tutte maggiori dalla grandezza X , mentre quelle di posto pari ne saranno minori. Il contrario avverrebbe se la frazione continua cominciassse da una frazione vera.

330. Nessuna frazione $\frac{h}{k}$ che avesse un denominatore minore de' denominatori di due ridotte consecutive, può approssimarsi più di queste ridotte al valore di X .

In effetti se una frazione $\frac{h}{k}$ avente il denominatore minore di quelli delle ridotte $\frac{M}{M^i}$ ed $\frac{N}{N^i}$ potesse approssimarsi

più di queste ridotte al valore di X , allora la detta frazione sarebbe compresa fra $\frac{M}{M'}$ ed $\frac{N}{N'}$; e supponendo che $\frac{M}{M'}$ sia minore di $\frac{h}{k}$, la differenza $\frac{h}{k} - \frac{M}{M'}$ ossia $\frac{hM - Mk}{kM}$ sarà minore della differenza $\frac{1}{MN'}$ fra le due ridotte; e riducendo

queste due differenze al medesimo denominatore, sarà il numeratore $(hM - Mk) N'$ della prima differenza minore del numeratore k della seconda; ma ciò è assurdo, perchè $hM - Mk$ essendo numero intero, ed essendo per ipotesi N' maggiore di k , sarà $(hM - kM) N'$ anche maggiore di k , e non già minore, come poch' anzi asserivamo essere.

331. Se dunque considerando una ridotta di una frazione continua, non evvi altra frazione più semplice di essa ridotta che possa più di questa approssimarsi ad esprimere il valore della quantità X , ne segue che allorquando una grandezza viene espressa da una frazione continua, le sole frazioni che valgono meglio a rappresentarla con approssimazione sono le ridotte della stessa. Ma quel che più importa si è che le ridotte fanno anche conoscere il grado di loro approssimazione alla grandezza X ; poichè arrestandosi, per esempio, alla ridotta $\frac{N}{N'}$, abbiain veduto che la differenza fra questa ridotta e la quantità X è minore della frazione che ha per numeratore l'unità, e per denominatore il quadrato del denominatore di essa ridotta.



MANIERA DI SCRIVERE I NUMERI PRESSO GLI ANTICHI ROMANI.

Le cifre che si adoperano per rappresentare i numeri si chiamano cifre *arabe*, perchè gli Arabi ne furono gl' inventori. Gli antichi romani invece facevano uso delle lettere maiuscole dell' alfabeto scritte qui appresso, ciascuna delle quali rappresenta il numero che le corrisponde al di sotto.

I V X L C D M

1 5 10 50 100 500 1000

Il modo come combinavano queste lettere per esprimere tutti i numeri era il seguente.

Due I scritti l'uno di seguito all' altro rappresentano il numero due; tre I scritti similmente rappresentano il numero tre. Così, II dinota *due*, e III dinota *tre*.

Un I posto a sinistra di V o di X fa diminuir questi numeri di un' unità; e però IV equivale a *quattro*, e IX equivale a *nove*.

Un I, due I, o tre I, scritti a dritta di V o di X fanno accrescere questi numeri rispettivamente di una, di due, e di tre unità; e però i seguenti numeri scritti in cifre romane equivalgono a quelli in cifre arabe che sono al di sotto di essi.

VI VII VIII XI XII XIII

6 7 8 11 12 13

Un X posto a sinistra di L o di C fa diminuir questi numeri di una decina. Così XL dinota *quaranta*, e XC dinota *novanta*. Un X, due X, ed anche tre X posti a dritta di L o di C fanno accrescere questi numeri rispettivamente di una decina, di due decine, o di tre decine; perciò i numeri 60, 70, 80 si rappresentano rispettivamente con LX, LXX, LXXX. Ed i numeri 110, 120, 130, si rappresentano con CX, CXX, CXXX.

I numeri contenenti decine ed unità si rappresentano scrivendo quello che dinota le unità a dritta di quello che dinota le decine. Così, per esempio, i seguenti numeri scritti in carattere romano corrispondono a quelli sottoposti scritti in carattere arabo.

XI, XIV, XVII, XXXV, XLIX, LXIII, XCIV.

11 14 17 35 49 63 94

¹² Duccento si rappresenta con CC; trecento con CCC, duemila con MM, tremila con MMM.

I numeri grandi si rappresentano come si vede qui appresso, sotto de' quali vi sono scritti i corrispondenti in cifre arabe:

10, 110, 100, 1100, 1000, 11000

500, 1000, 5000, 10000, 50000, 100000.

Le lettere D ed M furono introdotte dopo per brevità di scrittura; quindi il numero 1848, per esempio, può rappresentarsi in due modi, cioè con MDCCCLVIII, e con CCCCXXXVIII.

INDICE DELLE MATERIE

PARTE PRIMA

Definizione della grandezza, del numero, e degli altri primi vocaboli della scienza	da	9 a	12
Formazione de' numeri interi.	»		13
Numerazione parlata	»	13 a	16
Numerazione scritta	»	16 a	18
Nozioni sul sistema di numerazione.	»		19
Maniera di leggere i numeri	»	20 a	21
Distinzione de' numeri in astratti e concreti	»		21
Addizione de' numeri interi	»	23 a	25
Osservazioni sull' addizione	»	25 a	26
Prova dell' addizione	»		26
Sottrazione de' numeri interi	»	27 a	29
Osservazioni sulla sottrazione	»	29 a	30
Prova della sottrazione.	»		30
Moltiplicazione de' numeri interi.	»	30 a	40
Osservazioni sulla moltiplicazione	»	40 a	46
Prova della moltiplicazione	»	46 a	47
Divisione de' numeri interi	»	47 a	63
Osservazioni sulla divisione	»	63 a	67
Prova della divisione	»		63
Alcune proprietà de' numeri	»	67 a	70
Caratteri di divisibilità de' numeri per 2, 3, 4, 5, 8, e 9	»	70 a	73
De' numeri primi	»		74
Decomposizione di un numero in fattori primi	»	75 a	76
Proprietà de' divisori comuni a due numeri	»	77 a	78
Ricerca del massimo comun divisore di due numeri	»	79 a	81
Delle frazioni — Definizioni	»	81 a	84
Proprietà delle frazioni	»	84 a	83
Riduzione di una frazione a minimi termini	»	88 a	89

Riduzione delle frazioni al medesimo denominatore »	89 a 92
Estrarre un intero da una data frazione spuria . . »	92
Ridurre un intero ed una frazione ad un sol numero frazionario »	93
Ridurre un intero a numero frazionario di dato denominatore »	94
Convertire una frazione in un'altra di dato denominatore »	93 a 97
Addizione delle frazioni »	97 a 99
Sottrazione delle frazioni »	99 a 101
Moltiplicazione delle frazioni »	101 a 105
Divisione delle frazioni »	105 a 108
Frazioni di frazioni, »	108 a 109
Osservazioni sulla moltiplicazione e divisione delle frazioni »	110 a 111
Definizione de' numeri decimali, maniera di scriverli, e loro proprietà »	112 a 117
Addizione de' numeri decimali »	107 a 118
Sottrazione de' numeri decimali »	119 a 120
Moltiplicazione de' numeri decimali, »	120 a 121
Divisione de' numeri decimali »	122 a 125
Riduzione di una frazione ordinaria in decimale . . »	125 a 127
Delle frazioni decimali periodiche »	127 a 129
Correzione da farsi all' ultima cifra di un numero decimale approssimato, »	129 a 131

PARTI SECONDA

133

Osservazioni sulla natura del risultato nell'eseguire le quattro operazioni su' numeri che rappresentano unità concrete, »	133 a 136
De' numeri complessi o denominati — Definizioni . . »	136
Distinzione delle diverse unità di misura che occorrono negli usi della società »	136 a 138
Antico sistema metrico del Regno di Napoli »	138 a 139
Nuovo sistema metrico del Regno di Napoli »	140 a 142

Antico sistema metrico francese »	143
Nuovo sistema metrico francese »	<u>144</u>
Riduzione de' numeri complessi »	145 a <u>150</u>
Riduzione di un numero complesso ad unità dell' infima specie »	146
Essendo dato un certo numero di unità dell' infima specie, che contiene unità delle specie superiori, estrarne queste unità. »	147
Riduzione delle unità secondarie di un numero denominato a frazione ordinaria o decimale dell' unità principale »	147 a 148
Essendo data una frazione ordinaria o decimale dell' unità principale, ridurla a numero denominato »	148 a 150
Addizione de' numeri complessi »	<u>150</u>
Sottrazione de' numeri complessi. »	<u>151</u>
Moltiplicazione de' numeri complessi »	<u>152 a 155</u>
Metodo di prendere in parti »	<u>155 a 157</u>
Divisione de' numeri complessi »	<u>157 a 160</u>
Delle ragioni e delle proporzioni — Definizioni. . . »	<u>160 a 164</u>
Proprietà della ragione e della proporzione aritmetica »	164 a 166
Proprietà della ragione e della proporzione geometrica. »	<u>167 a 173</u>
Regola del tre — Definizioni »	173
Regola del tre semplice »	174 a 177
Nota sulla definizione della regola del tre . . . »	<u>178</u>
Regola del tre composta »	<u>177 a 184</u>
Problemi d' interesse »	<u>184 a 186</u>
Regola di sconto »	187 a 190
Regola di società »	<u>190 a 192</u>
Divisione di un numero in parti proporzionali ad altri numeri dati »	192 a 194
Regola di alligazione »	194 a <u>198</u>
Del medio aritmetico »	<u>198</u>
Regola congiunta »	199 a 200

PARTe TERZA **201**

Altre proprietà de' numeri	» 201 a 207
Ricerca di tutti i divisori di un numero dato	» 207 a 209
Ricerca del massimo comun divisore e del minimo comun dividendo di più numeri	» 209 a 212
Seguito delle frazioni decimali periodiche	» 212 a 214
Definizioni delle radici e potenze de' numeri	» 215 a 216
Composizione del quadrato di un numero	» 217
Estrazione della radice quadrata da' numeri	» 218 a 226
Estrazione della radice quadrata per <u>approssimazio-</u> <u>ne</u> , ed <u>incommensurabilità</u> delle radici de' nu-	
meri non quadrati perfetti	» 226 a 232
Composizione del cubo di un numero	» 232 a 234
Estrazione della radice cubica da' numeri	» 234 a 239
Estrazione della radice cubica per approssimazione	» 239 a 241
Approssimazioni numeriche	» 241
Metodo abbreviativo per l'addizione	» 241 a 243
Idem per la moltiplicazione	» 244 a 248
Idem per la divisione	» 248 a 253
Idem per l'estrazione della radice quadrata	» 253 a 258
Approssimazione relativa all'addizione	» 258
Idem per la sottrazione	» 259
Composizione del prodotto proveniente dal multipli- care la somma o differenza di due numeri per la somma o differenza di due altri numeri	» 260
Approssimazione relativa alla moltiplicazione	» 262 a 264
Idem per la divisione	» 264 a 267
Idem per l'estrazione della radice quadrata	» 267 a 270
Frazioni continue—Definizioni	» 270 a 272
Proprietà delle frazioni continue	» 272 a 278
Maniera di scrivere i numeri presso gli antichi ro- mani	» 279

606457



<i>Errori</i>	<i>Correzioni</i>	<i>Pag.</i>	<i>riga</i>
4	3	43	12
dalla	dalle	52	8
uno	una	54	27
contiene cc.	equivale esattamente ad		
	un numero intero	83	29
6	5	94	20
indica	indicata	96	10
8 diecimillesimi più 4	7 diecimillesimi più 6	117	22
(153)	(154)	122	22
10 ^{mi}	100 ^{mi}	122	25
1098	10,98	124	15 e 23
8,048 $\frac{13}{72}$	8,481 $\frac{58}{72} = 8,481 \frac{29}{36}$	148	16
è	le	154	28
20	2	159	5
35	23	159	29 e 30
7=3	7=3	166	23
15×6	15+6	171	22 e 23
8 : 3 :: 14 : 9	8 : 3 :: 24 : 9	172	32 e 36
4 : 4 :: 10 : 2	5 : 2 :: 10 : 4	172	idem
3×4, 14×10, 9×2	3×2, 24×10, 9×4	idem	37
3×4 :: 14×10 : 9×2	3×2 :: 24×10 : 9×4	173	1 e 5
$\frac{14}{9}, \frac{5}{4}, e \frac{10}{2}$	$\frac{24}{9}, \frac{5}{2}, e \frac{10}{4}$	idem	4
$\frac{8 \times 5}{3 \times 4} e \frac{14 \times 10}{9 \times 2}$	$\frac{8 \times 5}{3 \times 2} e \frac{24 \times 10}{9 \times 4}$	idem	5
larghezza	lunghezza	179	27
$\sqrt{20}$	$\sqrt{21}$	228	20
7	7		



